Ｉ-106　　一様な圧縮応力下の矩形板の固有振動数算定式

北海道大学　工学部　正員　三上　隆
北海道大学　工学部　正員　佐伯　昇

1. はじめに　初期応力下の矩形板の自由振動に関する研究は古くから行われ，いまだに多くの論文が発表されている。その中でも古典板理論[1]によれば，一方向に一様な圧縮荷重が作用する荷重辺単純支持，非負荷辺が任意条件支持の矩形板の固有振動数は，$(\omega/\omega_o)^2 = 1 - N_x/(N_x)_{cr}$で算定できることはよく知られている（$\omega_o$と$(N_x)_{cr}$はある規定されたモードに対する無負荷時の固有振動数および座屈荷重，ωは圧縮荷重N_xが作用するときの固有振動数である）。この式は固有振動数の２乗（ω^2）と作用荷重（N_x）が線形関係にあるという有益な情報を提供しているが，ω^2の評価には座屈荷重の決定および無負荷時の固有振動数の算定のための二つの固有値問題を解析しなければならない。またモード次数とω^2の関係が陽な形で表されていないため，固有振動数特性を理解するにはいま一つ不便さが残る。さらに著者らの知る限りでは，他の板理論に対する上式のような関係式は見当らない。そこで本報告では，上述の荷重・境界条件を対象にし，古典板・修正板理論（Mindlin 板理論を採用）に対して成立する後述の式 (10) を提示する。

2. 算定式の誘導　$x = 0, a$ で単純支持された厚さ h が一様な等方性矩形板（$a \times b$）が，単純支持された辺に大きさ $N_x^o(= h\sigma_x^o)$ の一様な面内圧縮応力を受ける場合を考える。算定式は変位関数に Levy 型のそれを採用すれば，離散化手法によらず導くことが出来るので，記述の簡単さから Rayleigh–Ritz 法による場合を示す。板理論に Mindlin 理論を用いるものとすれば，ひずみエネルギ（U），運動エネルギ（T）およびエネルギロス（V）はそれぞれ以下となる。

$$U = \iint \Big[D\Big\{\psi_{x,x}^2 + \psi_{y,y}^2 + 2\nu\psi_{x,x}\psi_{y,y} + (1-\nu)(\psi_{x,y}+\psi_{y,x})^2/2\Big\}/2 + kGh\Big\{(w_{,x}+\psi_x)^2 + (w_{,y}+\psi_y)^2/2\Big\}/2\Big]dxdy \quad \cdots\cdots (1)$$

$$T = \rho h \iint \Big[(w_{,t}^2 + h^2(\psi_{x,t}^2 + \psi_{y,t}^2)/12\Big]dxdy \quad \cdots\cdots (2)$$

$$V = N_x^o \iint \Big[(w_{,x}^2 + h^2(\psi_{x,x}^2 + \psi_{y,x}^2)/12\Big]dxdy \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで，D=曲げ剛性，ν=ポアソン比，G= せん断弾性係数，k=せん断補正係数，w=たわみ，ψ_xとψ_y=x と y軸方向の回転角。式 (3) の　　の部分は，曲率項[2]の考慮により現れたものであり，式 (2) と比較すれば明らかなように，運動エネルギの回転慣性項と同様な役割を果たす。

汎関数 $\Pi(= U - T - V)$ を最小化すれば，次のマトリックス方程式が得られる。

$$\Big[[K] - k[K_G] - \Omega^2[M]\Big]\Big\{\delta\Big\} = \Big\{0\Big\} \quad \cdots\cdots (4)$$

ここで，$\{\delta\}$ は変位係数ベクトル，$[K], [K_G]$ および $[M]$ はそれぞれ剛性，幾何学的および質量マトリックスであり，無次元化固有振動数と無次元化座屈係数はそれぞれ次式で与えられる。

$$\Omega^2 = \rho h\omega^2 a^4/D, \qquad k = a^2 N_x^o/D \quad \cdots\cdots (5)$$

なお，曲率項を考慮しているので，$[K_G]$ と $[M]$ の間には，x 軸方向の半波数を m とすれば次の関係が成立する。

$$[K_G] = m^2\pi^2[M] \quad \cdots\cdots (6)$$

1) 無負荷時の固有振動数 ($\bar{\Omega}$) と座屈係数 (k) の関係

式 (4) より，固有振動方程式 $\Big[[k] - \bar{\Omega}[M]\Big]\Big\{\delta\Big\} = 0$ および座屈方程式 $\Big[[k] - k[K_G]\Big]\Big\{\delta\Big\} = 0$ が得られる。式 (6) に留意し，上の二つの方程式の固有値を比較すれば，$\bar{\Omega}$と kの間には次の関係が成立する。

$$km^2\pi^2 = \bar{\Omega}^2 \quad \cdots\cdots (7)$$

式 (7) は x, y 軸方向波数 m, n に対して，最小の$\bar{\Omega}/m^2\pi^2$が座屈係数 k_{cr}を与えるが，考察している問題では（N_x^oのみ作用），$n = 1$ で基本振動数を与えるので k_{cr}は次式となる。

$$k_{cr} = \bar{\Omega}_{m_*1}^2/(m_*^2\pi^2) \quad \cdots\cdots (8)$$

ここで $m_*, \bar{\Omega}_{m_*1}$は $\mathrm{Min}(\bar{\Omega}_{j1}^2/(\pi^2 j^2))$（ただし,$j$=1,2,$\cdots$）を満たす jと $\bar{\Omega}_{j1}$である。

(2) 負荷時の固有振動数 (Ω) と無負荷の固有振動数 ($\bar{\Omega}$) の関係

座屈応力の λ倍 ($\lambda = 0 \sim 1$) の圧縮力が作用しているものすれば,式(8)を用いると負荷時の固有振動方程式は次のようになる。

$$\Big[[K] - \{\lambda m^2 \bar{\Omega}_{m_*1}^2/m_*^2 + \Omega^2\}[M]\Big]\Big\{\delta\Big\} = 0 \quad \cdots\cdots (9)$$

上式の固有値と無負荷時の固有値 $\bar{\Omega}$を等置すれば,次式が得られる。

$$\Omega_{mn}^2 \;=\; \bar{\Omega}_{mn}^2 - \lambda \bar{\Omega}_{m_*1}^2 (m/m_*)^2 \quad \cdots\cdots (10)$$

式(10)の特徴および式(10)から理解できる負荷時の固有振動数特性は次のようである。

(1) 式(10)は非載荷辺の境界条件に無関係に成立する。修正板理論（積層板も含む）に対しては,曲率項を考慮する場合にのみ成立する。

(2) 無負荷時の固有振動解析の結果のみより,座屈荷重および負荷時の固有振動数の算定が可能である。

(3) 固有振動数の2乗 Ω_{mn}^2は作用荷重（λに相当）に比例する。作用荷重 (λ) の変化に対する Ω_{mn}^2の変化率（変動率）は波数 n に依存しない。さらに変動率は波数 $m > m_*$ で大きく,$m < m_*$で小さい。

3. 適用例　　次のような問題を考える。

> 非載荷辺が固定の正方形板の座屈荷重および座屈荷重の50%の初期圧縮荷重が作用するときの最小固有振動数を求めよ。ただし ν=0.3 とする。

古典理論が適用可能とすれば, $\bar{\Omega}_{m1}$(m =1~4) は例えば文献 3) によれば$\bar{\Omega}_{11}$=28.95, $\bar{\Omega}_{21}$=54.74, $\bar{\Omega}_{31}$=102.2, $\bar{\Omega}_{41}$=170.3, となる。式(8)より k_m(m=1~4) を求めば, k_1=84.92, k_2=75.90, k_3=117.59, k_4=183.66 となるので,座屈荷重は $(N_x)_{cr}$ =75.90 $\pi^2 D/a^2$(ただし m_*=2 となる)。この結果は $(N_x)_{cr}$=7.69 $\pi^2 D/a^2$ であり,文献 4) の結果に一致している。

座屈荷重を与える m_*と $\bar{\Omega}_{m_*1}$ はそれぞれ, m_*=2, $\bar{\Omega}_{m_*1}$=54.74 である。したがって式(10)より Ω_{m1}を求めれば, Ω_{11}^2=(28.95)²−0.5(1/4)(54.74)² =463.54, Ω_{21}^2=1497.69,$\cdots$となり,最小固有振動数は m=n=1 で Ω_{11}=21.53 となる。

なお,この例では,最小固有振動数を与える波数が m=1 から m=2 に移り変わる λが存在する。すなわち, $\Omega_{11}^2 \geq \Omega_{21}^2$を満たす λがある。したがって,式(10)を用いて不等式

$$\bar{\Omega}_{11}^2 - \lambda(1/m_*)^2\,\bar{\Omega}_{m_*1}^2 \geq \bar{\Omega}_{21}^2 - \lambda(2/m_*)^2\,\bar{\Omega}_{m_*1}^2$$

と解けば $\lambda \geq$0.96 となる。なお,この結果は文献5)の図-2-(b)のそれに一致する。

4. まとめ　　単純支持された二辺上に一様な圧縮荷重が作用する場合の矩形板の固有振動数の算定式を提示した。算定式は従来のそれに異なり,無負荷時の固有振動数より負荷時の固有振動数が求められ,また単純支持方向の振動モードを規定する波数および座屈モードを規定する波数が陽な形で取り込められており,固有振動数特性を理解する上でも有益と思われる。

参考文献

1) Laurie,H. : Lateral vibrations as related to structural stability, J. of Appl. Mech., Vol.74, p.195, 1952.
2) Sun,C.T. : On the equations of Timoshenko beam under initial stress, J. of Appl. Mech., Vol.39, p.292, 1972.
3) 関谷壮・浜田実・角誠之助：平板構造強度設計便覧, 朝倉書店, 1982.
4) Timoshenko,S.P. and Gere,J.M. : Theory of Elastic Stability, McGraw–Hill, New York,N.Y., 1961.
5) 三上隆・芳村仁：初期応力を受ける円筒パネルの振動特性, 構造工学論文集, Vol.35A, p.709, 1989.