

I-37

平面はり構造物の初期不整の統計的研究

積水化学工業株式会社 正員 〇橋 徳  
長岡技術科学大学 正員 池田 清宏

1. はじめに: 構造物の節点位置、部材特性、材料特性等の初期不整は耐荷力低下の不可避的な不確定要因である。構造物の初期不整に関する従来の研究は、ランダムに初期不整パターンを推測値を与え耐荷力を求めるという操作を繰り返すような、主として試行錯誤や経験に基づくものであった。これに対し近年、構造物の耐荷力を漸近的に最も低下させる臨界初期不整モード決定法あるいは、ランダムな初期不整を有する構造物の耐荷力の確率密度分布等が、トラス構造物を適用例として明らかにされている。本研究は、この延長として、初期不整が平面はり構造物に及ぼす影響を明らかにするものである。

2. 臨界初期不整: 構造物の非線形釣り合い式を

$$H(\lambda, u, v) = 0 \quad (1)$$

とする。ここで、 $\lambda$ は荷重パラメータ、 $u$ はN次元変位ベクトル、 $v$ はp次元初期不整パラメータベクトルである。また、 $H$ は十分滑らかな関数であると仮定する。

初期不整を初期不整のパターン $d$ と大きさ $\varepsilon$ の2種類の変数を用い

$$v = v^0 + \varepsilon d \quad (\varepsilon \geq 0)$$

と表わす。ここで、初期不整パターンベクトル $d$ は

$$d^T d = 1 \quad (2)$$

と正規化されている。

耐荷力の初期不整 $v$ による耐荷力変化量 $\hat{\lambda}_c$ は、初期不整強度 $\varepsilon$ が微小であるとき漸近式

$$\hat{\lambda}_c \sim C(d) \varepsilon^\rho \quad (3)$$

により表わされる。この式中 $C(d)$ と $\rho$ は特異点の種類により異なり、

$\rho = 1, C(d) = -C_0 a$  : 極大点  
 $\rho = 1/2, C(d) = -C_0 |a|^{1/2}$  : 非対称分岐点  
 $\rho = 2/3, C(d) = -C_0 \cdot a^{2/3}$  : 不安定対称分岐点  
 $\rho = 2/3, C(d) = C_0 \cdot a^{2/3}$  : 安定対称分岐点  
 となることが明らかにされている。ここで、 $C_0$ は正定数であり、初期不整の影響を表わす変数 $a$ は

$$a = \xi^T B d \quad (4)$$

と与えられる。この式中の $\xi$ は完全系の特異点( $\lambda^0, u^0, v^0$ )における接線剛性行列 $J^0 = J(\lambda^0, u^0, v^0)$ の固有ベクトルであり、次の関係を満足するように選ぶ。

$$\xi^T J^0 = 0^T, \quad |\xi| = 1, \quad \xi^T (\partial H / \partial \lambda) \geq 0$$

ここで、 $|\cdot|$ はユークリッドノルムである。また、式(4)の $B$ は初期不整感度行列と呼ばれる $N \times P$ の行列であり、

$$B = (B_{ij}) = \left( \frac{\partial H_i}{\partial v_j} \right)_{(\lambda, u, v) = (\lambda^0, u^0, v^0)} \quad \left[ \begin{matrix} i=1, \dots, N, \\ j=1, \dots, p \end{matrix} \right]$$

と定義される。

式(4)から初期不整パターンベクトル $d$ が臨界初期不整パターンベクトル

$$d^* = \xi^T B$$

に等しいとき漸近的に耐荷力変化量 $\hat{\lambda}_c$ の大きさが最大となる。

3. 確率密度関数:  $d$ が単位球面上に一様に分布すると仮定する。 $d$ の $d^*$ 方向成分だけが $\lambda_c$ に寄与することから、耐荷力変化量の確率密度関数は以下の様に求まる。

極大点：

$$f(\xi) = C_{1p}(1 - \xi^2)^{(p-3)/2} \quad (-1 \leq \xi \leq 1)$$

不安定対称分岐点：

$$f(\xi) = 4C_{1p}|\xi|(1 - \xi^2)^{(p-3)/2} \quad (-1 \leq \xi \leq 0)$$

ここで、 $\xi$ は正規化された耐荷力変化量であり、

$$C_{1p} = 2^{-p+2}/(B(\frac{p-1}{2}, \frac{p-1}{2})), B(\cdot, \cdot) : \text{ベータ関数}$$

である。

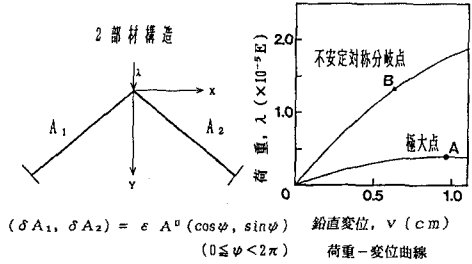


図-1 解析対象モデル

4. 平面はり構造物への適用：Williams' toggleと呼ばれる平面はり構造物を解析例として用いる（図-1参照）。耐荷力の漸近的な下限値として、臨界初期不整に対する耐荷力を求めた。

次に、 $p$ 次元単位球面上( $p=2$ )にランダムに分布する初期不整に対し、平面はり構造物の耐荷力を算出し、その耐荷力増分量の確率密度分布を求め、図-2参照に示した。この確率密度分布は理論解とよく一致していた。また、この確率密度分布の下限値は臨界初期不整を与えたときの耐荷力と初期不整の大きさが小さいほどよく一致しており、理論の漸近特性の妥当性を検証できた。参考のため単位円上に分布する初期不整の方向を示す $\psi$ と荷力との関係を図-3に示す。

$p$ 次元単位球面上( $p=2$ )にランダムに分布する初期不整は構造系の全部材の初期不整が連成すると仮定している。しかし、これは理論解を誘導するための便宜的な仮定であり、実際には、初期不整が構造系の個々の部材で独立であると考えの方が現実的である。そこで、 $[-\varepsilon A^0, \varepsilon A^0]$ の範囲に一様に分布する部材毎に独立な初期不整を与えたときの構造物の耐荷力の確率密度分布も求めた（図-4参照）。両者の確率密度分布はよく一致しており、前述の仮定が比較的現実的な結果を与え得ることを確認できた。

参考文献

- 1) K.Ikeda and K.Murota:  
Critical initial imperfection of structures, to appear in Int. J. of Solids and Structures, 1990
- 2) K.Ikeda and K.Murota:  
On random initial imperfection of structures, preprint.

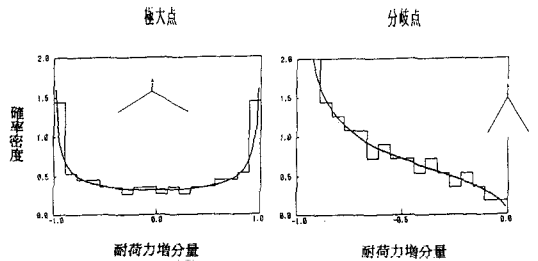


図-2 正規化された耐荷力増分量の確率密度関数

（構造系で初期不整が連成）

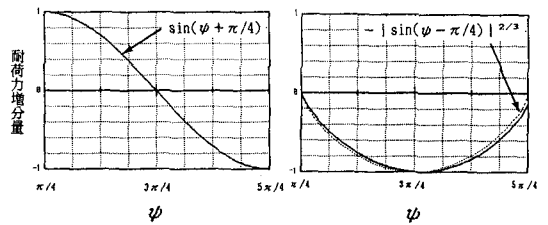


図-3 初期不整モードと耐荷力増分量

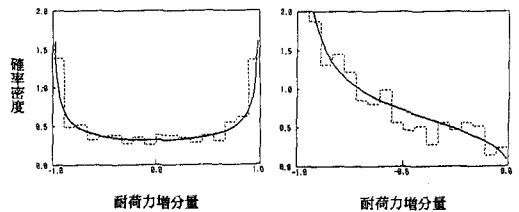


図-4 正規化された耐荷力増分量の確率密度関数

（構造系で初期不整が独立）