

I-30 種々の境界および荷重条件を統一した板の線形座屈解析法

東北大学工学部 ○正員 中沢 正利
東北大学工学部 正員 倉西 茂

1. まえがき

これまで板に関しては種々の境界および荷重条件の下での線形座屈解が多数発表され、*Handbook*等¹⁾にも纏められているが、それらは異なる研究者が個々に異なる形状関数を用いて求めたもので、精度が不明である上に単純な場合しか解けない。また一般に実際の板構造においては周辺境界条件が不明確なため、例えば固定の様な厳しい境界条件および単純支持の様な緩い境界条件での座屈強度の両者を明らかにしておく必要があり、かつ複数の境界条件を統一的に等しい精度で扱えることが望ましい。荷重条件についても単独荷重の載荷は稀であり、連成座屈強度を精度よく計算する必要がある。そこで本研究では、はりの振動解より得られる変位関数を用いることによって種々の境界条件を統一的に表現し得ることに着目し、さらに境界条件のみならず種々の荷重条件をも統一的に考慮できる板の線形座屈解析法を開発したので報告する。

2. 基礎理論

梁の自由振動理論から得られる変位関数²⁾は、面外たわみ $w(x, y)$ の形を

$$w(x, y) = t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} f_m(x) g_n(y), \quad \begin{cases} f_m(x) = h_i(z) \text{ for } i = m, z = x, \ell = a, \\ g_n(y) = h_i(z) \text{ for } i = n, z = y, \ell = b, \end{cases} \quad \dots (1)$$

$$h_i(z) = c_1 \sin\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right) + c_3 \sinh\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right) + c_4 \cosh\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right), \quad \dots (2)$$

とおいて x, y 方向とも共通の変位関数で表す。ここで、 c_1, \dots, c_4 および β_i は表-1に示す種々の境界条件および対応した振動数方程式から決まる係数である。図-1に示す二軸方向の不等曲げ、軸力、せん断を全て表現できる応力関数 Φ ³⁾は、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_a$ をそれぞれ x 方向作用曲げ応力、 y 方向曲げ応力、せん断応力として、

$$\Phi = \sigma_{x2} \left[\omega \cdot xy - \frac{1}{6b} (\alpha_x y^3 - 3by^2) \left\{ \gamma_x + (1 - \gamma_x) \frac{x}{a} \right\} - \frac{\kappa}{6a} (\alpha_y x^3 - 3ax^2) \left\{ \gamma_y + (1 - \gamma_y) \frac{y}{b} \right\} \right], \quad \dots (3)$$

ここで α_x, α_y は曲げと軸力の比、 γ_x, γ_y は不等曲げ比、 ω は曲げとせん断の比、 κ は x と y 方向応力比を示し、

$$\alpha_x, \alpha_y = \begin{cases} 0 & \text{uniform normal stress,} & \gamma_x \equiv \sigma_{x1}/\sigma_{x2}, \\ 2 & \text{pure bending,} & \gamma_y \equiv \sigma_{y1}/\sigma_{y2}, \\ < 2 & \text{bending and compression,} & \omega \equiv \tau_a/\sigma_{x2}, \\ > 2 & \text{bending and tension,} & \kappa \equiv \sigma_{y2}/\sigma_{x2}, \end{cases} \quad \dots (4)$$

のパラメータで定義する。座屈点近傍でのひずみエネルギー増分 ΔU および外力増分 ΔT は、

$$\Delta U = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - (1 - \nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy, \quad \dots (5-a)$$

$$\Delta T = \frac{t}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dx dy, \quad \dots (5-b)$$

で表わされ、固有値問題として $\Delta U = \Delta T$ なるうちの最小の荷重が座屈荷重として求められる。

表-1 種々の境界条件 (b.c.: 12は x, y 方向の境界条件がそれぞれ No.1, 2であることを意味する。)

| No. | Condition | Equation | No. | Condition | Equation |
|-----|--------------------|---|-----|-----------------|--|
| 1 | both sides s.s. | $\beta_i = i\pi$ | 4 | cantilever edge | $\cos(\beta_i) \cosh(\beta_i) + 1.0 = 0$ |
| 2 | both sides clamped | $\cos(\beta_i) \cosh(\beta_i) - 1.0 = 0$ | 5 | s.s. and free | $\tan(\beta_i) - \tanh(\beta_i) = 0$ |
| 3 | clamped and s.s. | $\sin(\beta_i) \cosh(\beta_i) - \cos(\beta_i) \sinh(\beta_i) = 0$ | 6 | both sides free | $\cos(\beta_i) \cosh(\beta_i) - 1.0 = 0$ |

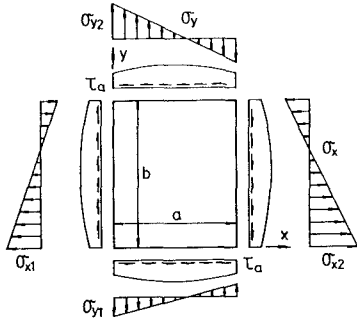


図-1 パネルに作用する外力

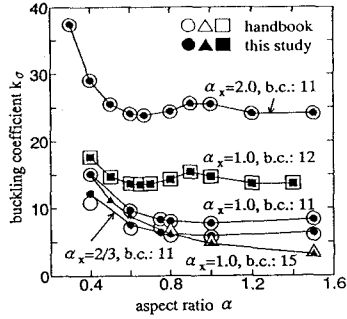


図-2 解析解との比較

3. 精度検証および解析例

b_{mn} の採用項数と精度の関係を調べた結果、 5×5 で充分であることが解り、以後の解析は全てこの項数で行なった。境界条件が変化する場合に対して曲げと軸力を受ける板の既存の解析解¹⁾と数値解を図-2で比較し、充分な精度で解析可能なことを検証した。図-3は各種境界条件下で x 軸方向の不等曲げとせん断を受ける板の解析例であるが、 $b.c. : 11$ で最も安全側の評価を与える等曲げ載荷は $b.c. : 12$ では危険側となることから、作用荷重と境界条件の組合せによる影響を正確に把握する必要のあることが示唆される。同じく図-4に示す $b.c. : 13$ の場合でも圧縮される辺が固定辺と単純支持辺とで異なる場合には、その違いが曲げ座屈強度および γ_x の影響に現われてくる。最後に図-5は二軸曲げの場合の解析例であるが、座屈強度は比較的単調な曲線を呈するという特性が明らかになった。図-6の座屈波形では $b.c. : 22$ の場合にモードの変化がみられる。

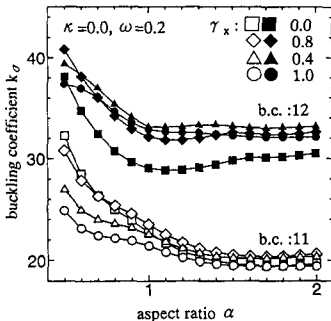


図-3 不等曲げとせん断を受ける板の座屈 ; $b.c. : 11, 12$

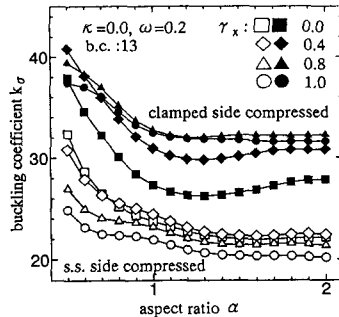


図-4 不等曲げとせん断を受ける板の座屈 ; $b.c. : 13$

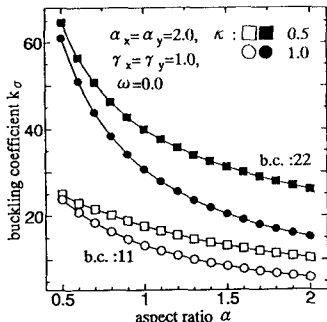


図-5 二軸曲げを受ける板の座屈 ; $b.c. : 11, 22$

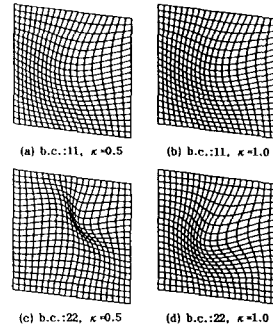


図-6 二軸曲げを受ける板の座屈モード ; $b.c. : 11, 22$

参考文献

- 1) Ed. by CRC Japan: Handbook of Structural Stability, Corona Pub. Co. LTD., 1971.
- 2) 西岡 隆: 構造振動解析, 培風館, pp.85, 1987.
- 3) Nakazawa et al.: Elastic buckling strength and post-buckling behavior ..., Proc. JSCE, No.428/I-15, pp.29-38.