

東海大学海洋学部 学生員 加藤 昇治
東海大学海洋学部 正員 北原 道弘

1. はじめに

構造材料内に存在する欠陥や不均質性を、超音波を利用して非破壊的に検出・評価しようとする場合、欠陥により散乱された弾性波動場を吟味する必要が生じる。このとき、着目すべき物理量は、変位や応力など通常の構造解析で重要となる物理量でなく、波動の散乱パターンを示す散乱振幅、波動の散乱エネルギーに関係する散乱断面積、あるいは波動の位相の進み・遅れを意味する位相シフトである場合が多い。ここでは、3次元弾性波動問題における散乱振幅を散乱断面積と関係付け、弾性散乱断面積の計算法を示し、材料の不均質性評価への一応用例について述べる。

2. 弾性散乱断面積

波動の伝播方向 \hat{x} に垂直な単位面積、単位時間当たりのエネルギーをインテンシティと呼べば、これは次のように書ける。

$$I = I_i \hat{x}_i = \hat{x}_i \sigma_{ij} \dot{u}_j \quad (1)$$

ここに、 σ_{ij} は応力、 \dot{u}_j は変位の時間微分である。このとき、表面Aを通過する単位時間当たりのエネルギー、即ち、パワーは次のようになる。

$$P = \int_A I dA = \int_A \hat{x}_i \sigma_{ij} \dot{u}_j dA \quad (2)$$

いま、散乱全断面積 $P(\omega)$ を、入射波の平均インテンシティ $\langle I^I \rangle$ に対する全方向に散乱された散乱波の平均パワー $\langle P^S \rangle$ の比として、次のように定義する。

$$P(\omega) = \frac{\langle P^S \rangle}{\langle I^I \rangle} = \frac{\langle \int_A \hat{x}_i \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^S dA \rangle}{\langle I^I \rangle} \quad (3)$$

ここに、 ω は角振動数であり、 $\langle \cdot \rangle$ は時間平均を表す。散乱エネルギーの方位依存性を表す物理量が散乱微分断面積 $dP(\omega)/d\Omega$ ($d\Omega$ は立体角) であり、 $dA = x^2 d\Omega$ なる関係より、次のように書ける。

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \frac{\langle x^2 \hat{x}_i \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^S \rangle}{\langle I^I \rangle} \quad (4)$$

式(4)と式(3)を用いて、散乱微分断面積 $dP(\omega)/d\Omega$ と散乱全断面積 $P(\omega)$ を決めるためには、散乱波の変位成分 u_j^S と応力成分 σ_{ij}^S を求める必要がある。このために、ここでは散乱場の積分表現を利用する。

3. 散乱場と基本解の遠方表現

全変位場 u を入射波 u^I と散乱波 u^S の和として

$$u_i(\mathbf{x}) = u_i^I(\mathbf{x}) + u_i^S(\mathbf{x}) \quad (5)$$

と書けば、散乱波 u^S の積分表現は次のようになる。

$$u_i^S(\mathbf{x}) = \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_j(\mathbf{y}) dS_y - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (6)$$

ここに、 S は散乱体の表面である。式(6)における基本解 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、3次元問題の場合、次のようになる。

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{e^{ik_L r}}{r} \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r} \right\} \right] \quad (7)$$

ここに、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ であり、 k_L は縦波の波数、 k_T は横波の波数である。

いま、次のように遠方近似を導入する。

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \sim x - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}, \quad (x \rightarrow \infty) \quad (8a)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x \text{ and } x = |\mathbf{x}| = (x_i x_i)^{1/2} \quad (8b)$$

このとき、基本解の主要項 $\exp(ik_\alpha r)/r$ は遠方において次のように書ける。

$$\frac{e^{ik_\alpha r}}{r} \sim \frac{e^{ik_\alpha x}}{x} e^{-ik_\alpha \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}}, \quad (\alpha = L, T) \quad (9)$$

4. 散乱場の遠方表現

基本解の主要項の遠方表現(9)を基本解(7)に用いて、これを散乱波の積分表現(6)に代入すれば、散乱波 u^S の遠方表現を得る。

$$u_i^S(\mathbf{x}) \sim u_i^{SL} + u_i^{ST} = A_i(\hat{\mathbf{x}}, k_L) \frac{e^{ik_L x}}{x} + B_i(\hat{\mathbf{x}}, k_T) \frac{e^{ik_T x}}{x} \quad (10)$$

ここに、 \mathbf{A} は縦波の、 \mathbf{B} は横波の散乱振幅(ベクトル量)であり、それぞれ次のように書ける。

$$A_i(\hat{\mathbf{x}}, k_L) = \hat{x}_i \hat{x}_j f_j(\hat{\mathbf{x}}, k_L) \quad (11a)$$

$$B_i(\hat{\mathbf{x}}, k_T) = (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j) f_j(\hat{\mathbf{x}}, k_T) \quad (11b)$$

上式中のベクトル \mathbf{f} は、散乱体の形状、散乱体表面上の変位・応力ベクトル、入射波の波数、また伝播母材内の物性に関係する量であり、次のようになる。

$$f_j(\hat{\mathbf{x}}, k_\alpha) = \frac{1}{4\pi\rho c_\alpha^2} \int_S [ik_\alpha \lambda \hat{x}_j u_k(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) + ik_\alpha \mu \{u_j(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) + u_k(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y})\} \hat{x}_k + t_j(\mathbf{y})] e^{-ik_\alpha \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} dS_y, \quad (\alpha = L, T) \quad (12)$$

式(10)を場の点 \mathbf{x} について微分することにより、散乱波による応力成分 σ_{ij}^S を得る。

5. 散乱微分断面積と散乱全断面積の表現

入射波を x_3 軸方向に伝播する平面縦(L)波とする。

$$u^I = \mathbf{e}_3 \exp[i(k_L x_3 - \omega t)] \quad (13)$$

このとき、弾性散乱微分断面積の表現は、定義式(4)に遠方散乱場の表現式(10)を用いて、最終的に次のようになる。

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = |A|^2 + \frac{k_L}{k_T} |B|^2 \quad (14)$$

ここに、縦波と横波の散乱振幅 A と B は式(11)と(12)に定義されている。いま、縦波による散乱微分断面積を

$$\frac{dP_L(\omega)}{d\Omega} = |A|^2 \quad (15)$$

横波による散乱微分断面積を

$$\frac{dP_T(\omega)}{d\Omega} = |B|^2 \quad (16)$$

とすると、散乱微分断面積は縦波と横波による成分の単純和でないことに注意する。

$$\frac{dP}{d\Omega} \neq \frac{dP_L}{d\Omega} + \frac{dP_T}{d\Omega} \quad (17)$$

式(14)に見るように、ポアソン比の効果 $k_L/k_T = \{(1-2\nu)/2(1-\nu)\}^{1/2}$ がエネルギー関係に入ってくる。

弾性散乱全断面積 $P(\omega)$ を得るには、微分断面積の表現(14)を全立体角について積分すればよく、結果は非常にシンプルな表現

$$P(\omega) = \frac{4\pi}{k_L} I_m \tilde{A}_3(0) \quad (18)$$

となる。ここに、前方平均散乱振幅 $\tilde{A}_3(0)$ は次のように定義されている。

$$\tilde{A}_3(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_3(\theta=0, \phi) d\phi \quad (19)$$

6. 応用例

Fig.1に解析対象とした散乱モデルを示す。インクルージョンは長軸と短軸の比を5:1とする円柱状をしており、入射波は、短軸方向と長軸方向に伝播する2通りの縦波を考えた。

円柱状インクルージョンに対する散乱全断面積 P (式(18)参照)の周波数依存性について調べた結果を Fig.2に示す。横軸は円柱の半径 a で無次元化した縦波の波数 ak_L 、縦軸も無次元化した散乱全断面積 $\frac{P}{a^2}$ を表示してある。図よりほぼ $ak_L = 1$ までの低周波数域では、インクルージョンの短軸方向よりも長軸方向に波が伝播する場合のほうが散乱エネルギーは大きく、ほぼ $ak_L = 1$ より高い周波数域では逆のことが言える。

ここで計算した散乱全断面積の不均質性評価への一応用について考える。Fig.3にそのイメージを示すように、Fig.1に示したインクルージョンが疎に分布している場合、波動の散乱に起因する散乱減衰率 $\alpha(\omega)$ と散乱全断面積 $P(\omega)$ の関係は、第一近似として次のように書ける。

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2} n P(\omega) \quad (20)$$

ここに、 n は単位立方体中のインクルージョンの数(不均質の程度)である。例えば、 n がサンプリング等により既知の場合、散乱全断面積 $P(\omega)$ を計算すれば、散乱減衰の程度 $\alpha(\omega)$ を評価することができる。逆に、散乱減

衰の程度 $\alpha(\omega)$ が超音波実験等により既知であれば、散乱全断面積 $P(\omega)$ を計算することにより、不均質の程度(単位立方体中のインクルージョンの数 n) を評価することができる。

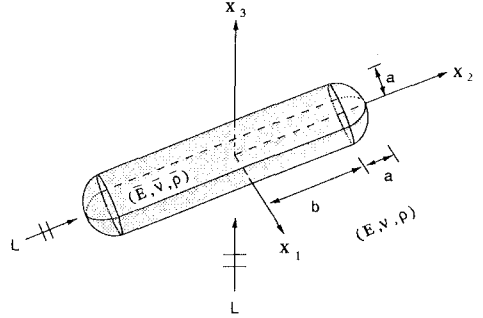


Fig.1 Whisker types of inclusion

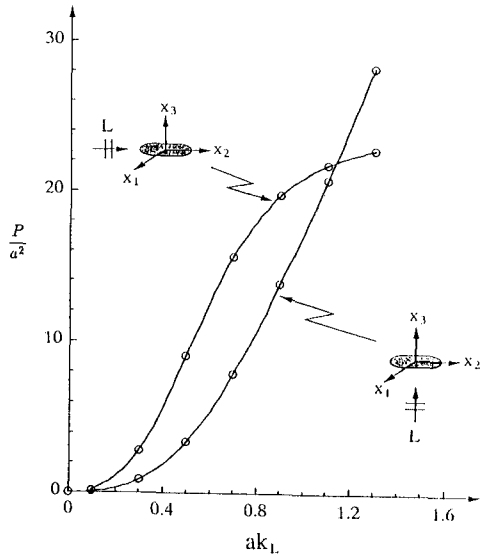


Fig.2 Total cross-section $\frac{P}{a^2}$ vs. ak_L

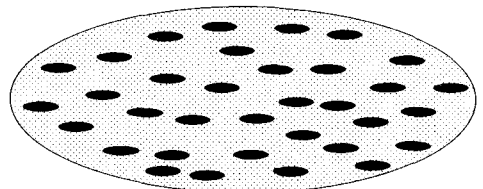


Fig.3 Inhomogeneous body