CS 1 -22〔Ｉ〕

多相系材料の平均的挙動の推定法について

名古屋工業大学　正員　小畑　誠
名古屋工業大学　正員　後藤　芳顯
名古屋工業大学　正員　松浦　聖

はじめに

土木工学において用いられている材料は広い意味において、いくつかの種類の材料から構成された複合材料、つまり多相系の材料であることが多い。変形を受ける過程で材料中に生ずる空隙やき裂も一つの相とみなすと、損傷を受けた材料もまた一種の多相系材料と見なすことができる。材料の破壊状態（限界状態）が材料の微視的な構造に依存しており、材料の強度を論ずる場合には微視構造に注目しなければならないことは良く知られている。その一方で構造物としての強度を問題とする場合には材料としての破壊にいたるまでの応力とひずみの関係を知ることが最も基本的な要件となる。したがって、こういった多相系材料の全体としての平均的な力学的性質、なかでも応力ひずみ関係を推定することは工学的に重要なことであり、これまでにも数多くの試みがなされてきてた。本研究では、数学モデルとして周期構造を用い、実用上は重要となる３相以上からなる多相系材料について、平均的な応力とひずみの関係を推定する方法について考える。

平均化の考え方

いま考えている多相系材料がn 種類の相からなるものとし、それぞれの相の体積比率は$f_m (m=1,..,n)$ とする。それぞれの相の応力ひずみ関係は既知であり、

$$\sigma^m_{ij}=\mathcal{D}^m_{ijkl}\varepsilon^m_{kl} \tag{1}$$

のように表されているものとする。目的は多相系材料からなる構造物の対象とする代表長が材料の不均一性に比べてある程度以上大きいとき、この材料全体の平均的な応力とひずみの関係

$$\sigma^0_{ij}=\mathcal{D}_{ijkl}\varepsilon^0_{kl} \tag{2}$$

を、具体的には平均的な剛性$\mathcal{D}_{ijkl}$を推定することである。ここで平均応力、ひずみはそれぞれの体積平均として定義される。式(2)を各相ごとのひずみの平均量で表すと

$$\mathcal{D}_{ijkl}\varepsilon^0_{kl}=\sum_m f_m\mathcal{D}^m_{ijkl}\langle\varepsilon_{kl}\rangle^m \tag{3}$$

となる。$\langle\ \rangle^m$ は第m 相での平均量を示す。いまここで何らかの方法で各相ごとの平均量と全体の平均量を

$$\langle\varepsilon_{ij}\rangle^m=A^m_{ijkl}\varepsilon^0_{kl}\quad (m=1,\dots,n) \tag{4}$$

図１　２相系材料

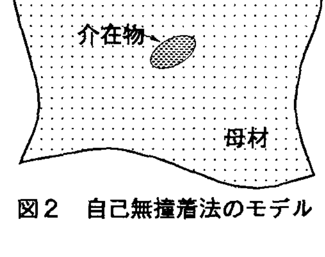

図２　自己無撞着法のモデル

図３　周期構造法のモデル

のように与えることができたとすると、目的とする剛性$\mathcal{F}_{ijkl}$は次のように求めることができる。

$$\mathcal{F}^0_{ijkl}=\sum f_m \mathcal{F}^m_{ijkl} \tag{5}$$

したがって、この問題では式(4)をどのような手法によって求めていくかをあきらかにすればよいことになる。

A^m_{ijkl}を求めるためには、材料の不均一性を直接的、あるいは間接的にあつかうことのできる数学モデルを設定して適当な境界条件の下で境界値問題を解けば良い。このときに付随する境界値問題を解くことができさえすれば数学モデルの設定は任意である。モデルとしてはもちろん、材料の非一様性などを正確に表すものであることが望ましいがその分、解析的な取扱いは困難になる。例えば自己無撞着法では図１に対し図２のような母材と介在物のモデルを設定する。ただし、母材は求めるべき平均的な剛性$\mathcal{F}_{ijkl}$を持つものとしている。これはこのモデルに対し境界値問題が容易に解けるためである。また解が級数という幾分複雑な形ではあるが図３のような周期構造のモデルを設定することもできる。このモデルでは不均一性の扱いがより直接的であり、したがって介在物などの相互作用が大きいときに良いモデルとなるものと思われる。また２重の介在物モデルを用いる非常に巧妙な方法も提案されている。[1)]

ここでは、多相系の材料に対し周期構造のモデルを基本に用いることを考える。ただし２相系の問題とは異なり母材としては介在物以外の相の式(3)で定義される意味での平均的な剛性を持つものとする。多相系における自己無撞着法を適用した場合と同様に図３の介在物をそれぞれの相とみなして求められるA^m_{ijkl}を用いて平均的な剛性$\mathcal{F}^0_{ijkl}$を求めることができる。

数値計算例

以上に示した考え方は弾性を基本としているが、その定式化においてあきらかなように応力とひずみをそれぞれ応力、ひずみ増分と見なせば変形とともに損傷などにより各相の剛性が変化していく材料などにも適用できる。そこで最も簡単な例として２次元的な疑似多結晶体を一軸引張りした場合について応力ひずみ曲線を求めた。結果は、別の平均化手法である自己無撞着による結果もあわせても同時に図４a,bに示した。この場合の各相は方向を同じくする疑似結晶である。いずれの場合も各相の体積比率は同じとし、介在物の形状は矩形としている。相の数が多く同相の介在物間の相互作用が小さい場合には結果は自己無撞着法にほとんど一致し、相の数が少なく相互作用が大きいと思われる場合は自己無撞着法のモデル化には無理が生じる領域であり、それに対応して両者の結果に大きな差がでることがわかる。

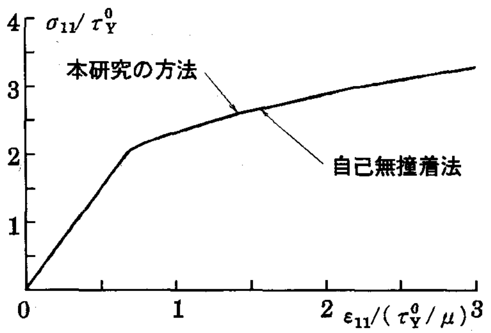

図４a　応力ひずみ関係（１２方向モデル）

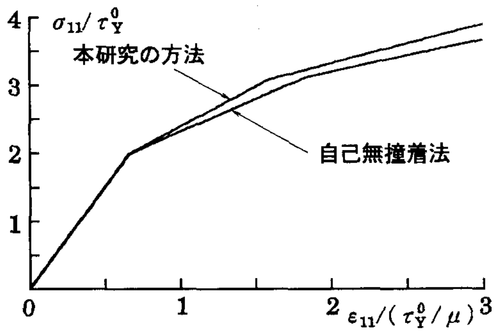

図４b　応力ひずみ曲線（４方向モデル）

参考文献：１）堀宗朗、三浦尚、不均一弾性体の平均弾性（英文）、土木学会論文集、No.428/I-15(1991)