

福島工業高等専門学校 正員 根岸嘉和
山梨大学工学部 正員 平島健一

1 緒言 層状性複合材料の力学挙動の解析に関する変位仮定型の高次近似理論を構築し、動的問題の解析例を示して精度の検証を行う。本理論は、層接合面での面外応力(層間応力)も未知量に加えて、高次平板理論の支配式に相当する方程式を各層ごと立て、これらを連立させて解くことにより、層接合面での変位の連続条件を満足すると同時に、面外応力の不連続性を補う機能をもたせたものである。また本理論は、この系統の各種理論^{1)~3)}を包含し一般化した高精度な静的・動的理論となっている。

2 理論の定式化 解析対象とする層状性複合材料(N層)の構造と座標系を図1(a)に示す。各記号の上付き括弧内の添字のうち[k]:k=1, 2, ..., N.は層番号を、<k>:k=0, 1, 2, ..., N.は境界面番号を表す。各層は一般的な異方性を示し、応力成分 $\sigma_{ij}^{[k]}$: (i, j=x, y, z)は次式の構成関係式で与えられるものとする。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{[k]} (u_{k,i} + u_{i,k})^{[k]} / 2 \dots (1)$$

理論構築の出発点として、各層の変位成分 $u_i^{[k]}$ を基準化層厚座標: ξ ($\xi = 2z_k/h^{[k]}$)のべき級数展開(Mは理論次数)で次式のように仮定する。

$$u_i^{[k]} = \sum_{m=0}^{2M-1} u_{i(m)}^{[k]} (x, y, t) * \xi^m \dots (2)$$

また、変位成分は図1(b)に示すように層接合面で連続とし、次の連続条件式が成り立つものとする。

$$g_i^{<k>} = \sum_{m=0}^{2M-1} \{ u_{i(m)}^{[k]} - (-1)^m u_{i(m)}^{[k+1]} \} = 0 \dots (3)$$

式(2)の変位仮定のもとに、式(3)の変位の連続条件の $g_i^{<k>}$ にLagrange未定乗数 $\sigma_{iz}^{<k>}$ を乗じて汎関数中に考慮したHamilton原理を用い、独立変数を $u_{i(m)}^{[k]}$ ならびに $\sigma_{iz}^{<k>}$ にとつた変分演算を実施した後、厚さ方向積分と時間tに関する部分積分を実施する。この結果を整理し次式を得る。

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left[\sum_{k=1}^N \sum_{n=0}^{2M-1} \iint [\sigma_{i,aa}^{(n)} - n\sigma_{iz}^{(n-1)} + \bar{f}_i^{(n)} + F_i^{(n)} - \rho \ddot{u}_i^{(n)}]^{[k]} \delta u_{i(m)}^{[k]} dx dy - \oint [(n_a \sigma_{ai}^{(n)})_{s_a} - \bar{t}_i^{(n)}]^{[k]} \delta u_{i(m)}^{[k]} ds + \sum_{k=1}^{N-1} \iint g^{<k>} \delta \sigma_{iz}^{<k>} dx dy \right] = 0 \dots (4)$$

なお $\dot{}$ (\cdot)は時間tに関する偏微分を表し、 $\ddot{}$ (\cdot)の後の添字はその座標に関する偏微分を表す。またラテン添字はx, y, zをとり、ギリシア添字は面内座標x, y

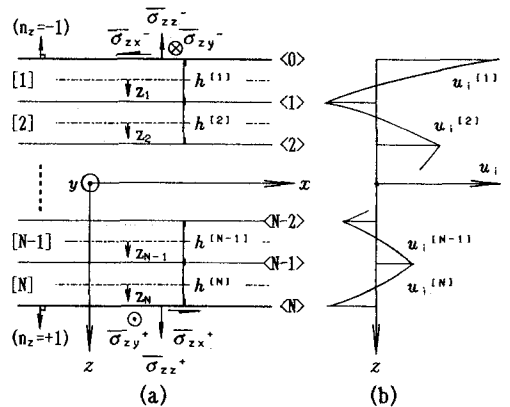
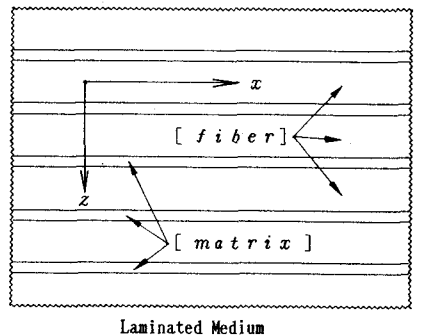


図-1 層状性複合材料と座標系および変位の仮定



[fiber] : G_f, ρ_f, ν_f	h_f	
$\left(\begin{array}{l} G_f/G_m=100, \nu_f=0.30 \\ \rho_f/\rho_m=3.0, \nu_m=0.35 \\ h_f/h_m=4.0 \end{array} \right)$		
[matrix] : G_m, ρ_m, ν_m		h_m
Material Constants		

図-2 等方性2相の多重積層材料の形状と材料定数

をとるものとし総和規約を適用する。さらに S_0 は側端面の応力境界、 $n_{\alpha}^{(k)}$ はその法線の方向余弦である。

また式(4)の各記号は次式で定義されるような、各層ごとの高次モードを表している。

$$\left. \begin{aligned} & \{ \sigma_{i,j}^{(n)} ; \bar{f}_i^{(n)} ; u_i^{(n)} ; \bar{t}_i^{(n)} \}^{[A]} = \\ & \int_{-1}^1 \{ \sigma_{i,j}^{[A]} ; \bar{f}_i^{[A]} ; u_i^{[A]} ; \bar{t}_i^{[A]} \} * \zeta^n d\zeta, \\ & F_i^{(n)[A]} = [\sigma_{iz}^{[A]} \zeta^n]_{-1}^1 \\ & = \sigma_{iz}^{(k)} - (-1)^n \sigma_{iz}^{(k-1)}. \end{aligned} \right\} (5)$$

なお $\bar{f}_i^{(k)}$ は物体力、 $\bar{t}_i^{(k)}$ は側端面荷重、 $\rho^{(k)}$ は質量密度、 $\sigma_{iz}^{(k)}$ は層間応力(or表面荷重)である。

式(4)の重積分中内の $\delta u_{i(n)}^{(k)}$ の係数式から各層ごとの運動方程式が得られ、 $\delta \sigma_{iz}^{(k)}$ の係数式として式(3)に示した変位の連続条件が得られる。また、式(4)の周積分内の $\delta u_{i(n)}^{(k)}$ の係数式あるいは付帯条件式より境界条件式が得られることになる。

3 各次数の理論 N層構造をM次理論で解析する場合の未知量は、式(2)の変位係数: $u_{i(n)}^{(k)}$ が6NM個と層間応力: $\sigma_{iz}^{(k)}$ が3(N-1)個の合計6NM+3(N-1)個となる。なお本理論の1次理論で面外変位の1次成分 $u_{z(1)}^{(k)}$ を削除したものがMauの理論²⁾に一致する。また本理論は、均質板に関しては著者の一人らが先に提案した一般化高次理論³⁾に一致する。

4 数値計算例 図-2に示すような2種の等方性相よりなる多重積層構造の、層に平行なx-軸方向に伝播する平面調和波(波数k, 位相速度c)の分散解析を実施し厳密解⁴⁾および古典理論による解⁵⁾と比較する。図-3は逆対称と対称の1次モード(A1, S1)の分散曲線の結果をEffective Stiffness Theory(E. S. T.)と略記)の1次理論⁶⁾、2次理論⁷⁾と比較したものであり、図-4はS1の層厚モード⁸⁾解析結果の厳密解への収束状況を表し、図5は対称モードの波動の位相速度 \bar{c}^* の(S1~S6)を本理論の1次、3次、5次理論で解析した結果である。これらの結果より本理論は、高次化に伴い未知量数は増大するが、急速に精度が向上し、精密な解析が可能な理論であることが検証された。

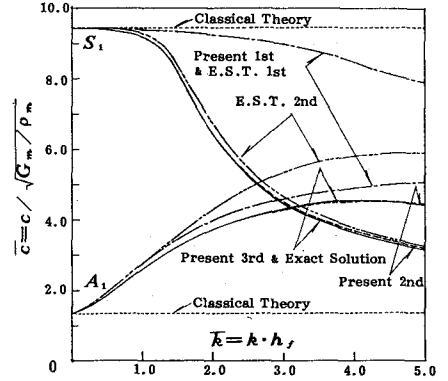


図-3 逆対称1次(A1)・対称1次(S1)モードの分散曲線

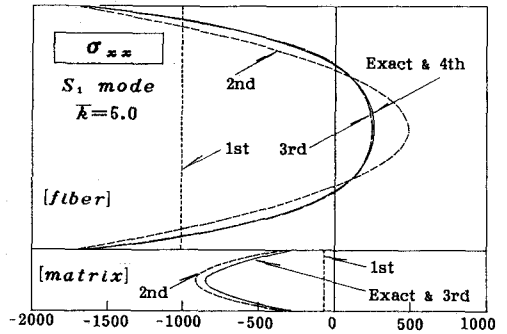


図-4 応力(σ_{xz} , σ_{xx})の層厚モード⁸⁾(S1モード, $\bar{k}=5.0$)

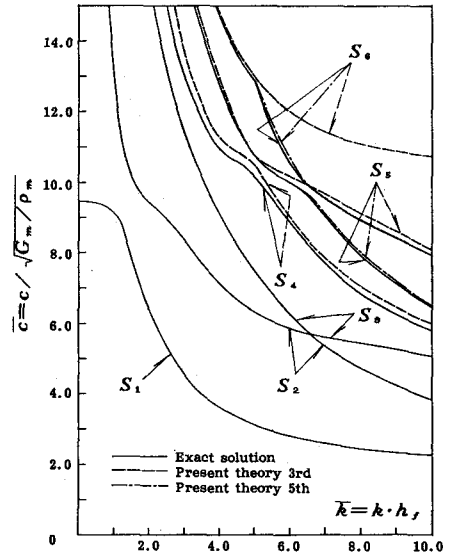


図-5 対称モードの1次(S1)~6次(S6)の波動分散曲

参考文献 (1) Sun, C. T. and Whitney, J. M. : AIAA J., 11(1973), 178. (2) Mau, S. T. : J. Appl. Mech., 40(1973), 606. (3) 平島・根岸:土木学会論文報告集, 330(1983), 1;333(1983), 21. (4) Pagano, N. J. : J. Comp. Mat., 3(1969), 398. (5) Reissner, E. and Stavsky, Y. : J. Appl. Mech., 28(1961), 402.