CS 1 - 4〔Ｉ〕　２ヶ所で接合された帯板異材接合問題の解法

名古屋工業大学　学生員　加藤　誠司　　住友金属工業KK　正員　上田 篤志
名古屋工業大学　正　員　長谷部 宣男　　名古屋工業大学　正員　中村 卓次

【1.はじめに】　近年、新素材や複合材料の発達等により、数多くの異種材料接合部がみられるようになった。しかし、接合界面での破壊に関する解析的研究は難しい。著者らは一連の研究[1-3]で、接合部両端に剥離を有する場合の異種材料の帯形状部材の接合問題を扱ってきた。しかし、接合界面に欠陥が存在し、接合部中間から剥離が進展することも実際には起こり得る。そこで本報告では、fig.1-aのように接合部中間にも剥離を有する問題を扱う(接合部が２ヶ所)。接合部が２ヶ所になったことで境界条件式が変わり、数学的に解析が複雑となるが、一般解が得られたので以下に示す。

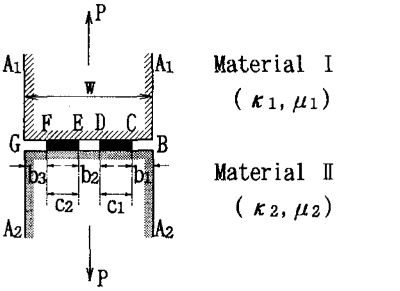

fig.1-a 実物理面

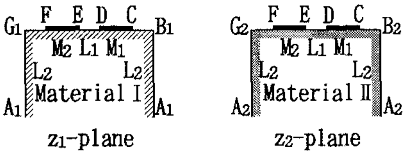

fig.1-b 仮想物理面

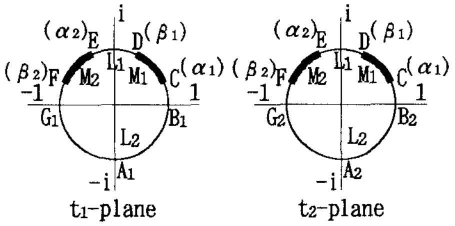

fig.1-c 写像面（単位円）

【2.解析手法と一般解】　fig.1-aのように接合部(ＢＧ間)が直線で、部材形状が接合線に対称である。部材Ｉを接合線に対し回転変換することにより、部材Ｉと部材Ⅱの形状は一致し(fig.1-b)、この部材を単位円内に写像する有理写像関数$\omega(t_j)$は同一のものを用いることができる。これは次式のように表される。なお、添え字j=1,2は部材Ｉ,Ⅱを表す。

$$\omega(t_j) = \sum_{k=1}^{N} \frac{E_k}{\zeta_k - t_j} + E_c \tag{1}$$

複素応力関数$\phi_j(t_j)$を用いると、境界上での外力と変位の条件式は次式のように表される[4]。

$$\text{外力}: \phi_j^+(\sigma) - \phi_j^-(\sigma) = i\int (p_{xj} + i\,p_{yj})\,ds \tag{2}$$

$$\text{変位}: \kappa_j \phi_j^+(\sigma) + \phi_j^-(\sigma) = 2\mu_j(u_j + i\,v_j) \tag{3}$$

ここで、μ_jはせん断弾性係数、κ_jはν_jをポアソン比として平面歪状態で$3-4\nu_j$、一般化された平面応力状態で$(3-\nu_j)/(1+\nu_j)$で表される。また、接合線上の点は部材ＩとⅡで同一の座標となり、写像面(fig.1-c)でも区別する必要がないため、接合部の境界上でのt_jをσと置く。p_{xj}, p_{yj}, u_j, v_jはfig.1-bでの外力及び変位である。

本研究では接合部が２ヶ所であるので、添え字(q=1,2)を用いて接合部での境界をMq、それ以外の境界をＬqと表す(fig.1-b,c)。外力と変位の境界条件(2),(3)を用いて、Ｌq上では２つの外力成分p_{xj}, p_{yj}が与えられ、また、Mq上では部材ＩとⅡの応力と変位とがそれぞれ連続なことにより、Ｌq,Mq上の境界条件式がそれぞれ得られ[5]、Riemann-Hilbert問題に帰着される。この問題の解$\phi_j(t_j)$は次式で与えられる。なお、添え字1は部材Ｉに関するものを表しており、部材Ⅱに関する複素応力関数等は添え字1と2を入れ換えることによって表される。

$$\phi_1(t_1) = H_1(t_1) + \frac{\gamma_1 \chi_1(t_1)}{2\pi i} \int_{M_q} \frac{g_1(\sigma)}{\chi_1(\sigma)(\sigma - t_1)}\,d\sigma + \chi_1(t_1) P_1(t_1) \tag{4}$$

$$\chi_1(t_1) = (t_1 - \alpha_1)^{m1}(t_1 - \beta_1)^{1-m1}(t_1 - \alpha_2)^{m1}(t_1 - \beta_2)^{1-m1} \tag{5}$$

$$m_1 = 0.5 + i\frac{\ln\lambda_1}{2\pi} \tag{6}$$

$$\lambda_1 = \frac{\kappa_2\mu_1+\mu_2}{\kappa_1\mu_2+\mu_1} = \frac{1-\beta_D}{1+\beta_D} \qquad \gamma_1 = \frac{\mu_1(\kappa_2+1)}{\kappa_1\mu_2+\mu_1} = \frac{1-\alpha_D}{1+\beta_D}$$

ここで、$g_1(\sigma)$, $P_1(t_1)$は任意の有理関数で、複素応力関数の正則条件等から決定される[5]。また、第１項の$H_1(t_1)$は荷重項である[5]。$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$は境界ＬｑとMqとの接続点Ｃ, Ｄ, Ｅ, Ｆに対応する単位円上の座標である。なお解析に便利なため、部材Ｉ, IIの材料定数としてDundursの材料定数α_D, β_Dを用いる[6]。

(4)式の未定関数等を求めて整理すると、最終的に複素応力関数$\phi_j(t_j)$の一般解は次式のように表される。

$$\phi_1(t_1) = H_1(t_1) + \frac{\gamma_1}{1+\lambda_1}\left[-\sum_{k=1}^{N}\left\{1+\frac{1+\lambda_1-\gamma_1}{\gamma_1}\frac{\chi_1(t_1)}{\chi_1(\zeta_k)}\right\}\frac{\overline{A_{1k}}B_k}{\zeta_k-t_1} + \sum_{k=1}^{N}\left\{1-\frac{\chi_1(t_1)}{\chi_1(\zeta'_k)}\right\}\frac{A_{2k}\overline{B_k}\zeta_k'^2}{\zeta'_k-t_1}\right] \tag{7}$$

ここで、$A_{jk}=\phi'_j(\zeta_k)$，$B_k=E_k/\overline{\omega'(\zeta_k)}$，$\zeta'_k=1/\overline{\zeta_k}$ である。

本報告では部材両端に集中引張力Ｐが作用し、それ以外のＬｑ上には外力の作用しない荷重を考える(fig. 1-a)。この場合の荷重項$H_j(t_j)$は次式のようになる。

$$H_1(t_1) = \frac{C_1}{2\pi i}F_{1L1}(t_1) - \frac{P}{2\pi i}F_{1L2}(t_1) \tag{8}$$

$$F_{1Lq}(t_1) = \chi_1(t_1)\int_{Lq}\frac{1}{\chi_1(\sigma)(\sigma-t_1)}d\sigma \tag{9}$$

なお、C_jは境界M_1上の合力で、$C_j = i\int_{M1}(\sigma_{yj}+i\tau_{xyj})ds$ で表される未定の値であるが、複素応力関数の正則条件等により決定することができる。

実際の計算においては、複素応力関数の一次導関数等を用いるため、(9)式を微分する必要があるが、このような積分のt_jに関する微分形はすでに求められている[7,8]。

【3.おわりに】　(7)式で表される複素応力関数を用いることにより、部材の応力分布を得ることができる。本報告ではfig.2に応力分布の一例を示した。接合部両端での剥離長が$b_1/w=b_3/w=0.10$、接合部中間での剥離長が$b_2/w=0.20$、接合部の長さが$c_1/w=c_2/w=0.20$と剥離状態が左右対称である場合の応力分布を示している。なお、接合線上での応力σ_y, τ_{xy}は部材ＩとIIとで同じであるが、σ_xは異なるため添え字Ｉ, IIを用いて区別し、同じ座標上に示している。

また、剥離先端での接合強度の指標である『剥離の応力の強さ(ＳＩＤ)[2,3]』も(7)式の複素応力関数を用いて求められる。

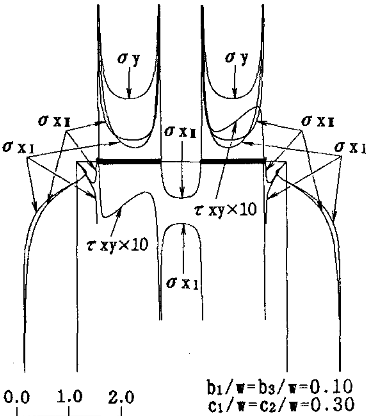

fig.2　応力分布図

《参考文献》 1)加藤ら,第46回年次学術講演会講演概要集Ｉ-274 (1991)　2)加藤ら,第41回応用力学連合講演会講演予稿集333(1992)　3)加藤ら,土木学会中部支部研究発表会講演概要集Ｉ-29(1992)　4)N.Hasebe et al., J.Eng.Mech., ASCE, 116, 12, 2722-2737(1990)　5)長谷部ら,材料, 39, 445, 1405-1410(1990)　6)J.Dundurs, J.Composite Mater., 1, 310 (1967)　7)長谷部ら,「応力境界と変位境界を２ヶ所づつ有する平面弾性混合境界値問題の解法」土木学会論文集(掲載可)　8)N.Hasebe et al., A Mixed Boundary Value Problem for a Debonding of a Semielliptic Rigid Inclusion on the Rim of a Half Plane, Ing.Arch.(Germany)(accept)