CS 1 - 2〔Ⅰ〕　マイクロポーラー弾性体の２次元動弾性問題の境界要素解析

福井大学大学院　学生員　奥井裕三
福井大学工学部　正　員　福井卓雄

1. はじめに

内部構造を持つ物体中を弾性波が伝播する場合には，微小散乱の繰り返しによる分散のために，古典弾性体中の波とは異なる挙動をする．本論文では，内部構造をもつ物体として，マイクロポーラー弾性体をとりあげ，２次元動弾性問題について考察する．まず，基本特異解を求め，その特性をみる．また，このような物体中の散乱問題を扱うために，境界要素法を構成する．

2. マイクロポーラー弾性体の２次元動弾性問題

Eringen [1] によると，線形マイクロポーラー弾性論における基礎式は，次のようになる．λ, μ, を Lamé 定数，ρ を質量密度，κ, α, β, γ をマイクロポーラー弾性定数，j をマイクロ慣性モーメントとして，u_i, ϕ_i をそれぞれ，変位，マイクロローテーションとし，f_i, l_i をそれぞれ，物体力，物体偶力とすると，

$$\begin{aligned}&\rho(c_2^2+c_3^2)u_{i,jj}+\rho(c_1^2-c_2^2)u_{j,ji}+\rho c_3^2\varepsilon_{ijk}\phi_{k,j}+f_i=\rho\ddot{u}_i\\&\rho c_3^2\varepsilon_{ijk}u_{k,j}+\rho jc_4^2\phi_{i,jj}+\rho jc_5^2\phi_{j,ji}-2\rho c_3^2\phi_i+l_i=\rho j\ddot{\phi}_i\end{aligned}\tag{1}$$

ここで，$c_1^2=(\lambda+2\mu)/\rho$, $c_2^2=\mu/\rho$, $c_3^2=\kappa/\rho$, $c_4^2=\gamma/\rho j$, $c_5^2=(\alpha+\beta)/\rho j$, $\omega_0^2=c_3^2/j=\kappa/\rho j$ とおいた．また，添え字は，1, 2, 3 をとるものとする．２次元問題（面内問題,面外問題）においては，変位 u_i, マイクロローテーション ϕ_i を $u_i=u_i(x_1,x_2)$, $\phi_i=\phi_i(x_1,x_2)$ と仮定すれば，基礎式(1)は，面内問題について，

$$\begin{bmatrix}\rho[(c_2^2+c_3^2)\nabla^2\delta_{\alpha\beta}+(c_1^2-c_2^2)\nabla_\alpha\nabla_\beta] & \rho c_3^2\varepsilon_{3\alpha\beta}\nabla_\beta\\ \rho j\omega_0^2\varepsilon_{3\alpha\beta}\nabla_\alpha & \rho j(c_4^2\nabla^2-2\omega_0^2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_\beta\\ \phi_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f_\alpha\\ l_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho\delta_{\alpha\beta} & 0\\ 0 & \rho j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{u}_\alpha\\ \ddot{\phi}_3\end{bmatrix}\tag{2}$$

面外問題について，

$$\begin{bmatrix}\rho(c_2^2+c_3^2)\nabla^2 & \rho c_3^2\varepsilon_{3\alpha\beta}\nabla_\alpha\\ \rho j\omega_0^2\varepsilon_{3\alpha\beta}\nabla_\beta & \rho j(c_4^2\nabla^2-2\omega_0^2)\delta_{\alpha\beta}+c_5^2\nabla_\alpha\nabla_\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_3\\ \phi_\beta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f_3\\ l_\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho & 0\\ 0 & \rho j\delta_{\alpha\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{u}_3\\ \ddot{\phi}_\alpha\end{bmatrix}\tag{3}$$

となる．ここで，ギリシア文字の添え字は，1, 2 をとり，ラテン文字の添え字については，これまでどうりとする．以後は，面内問題に限って記述するが，面外問題についても同様に扱うことができる．

3. 基本特異解

基本特異解テンソル Γ_{ij} を次式のように定義する．

$$\mathbf{L}_{ij}\Gamma_{jk}(\mathbf{x};\mathbf{y})=-\delta_{ik}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\tag{4}$$

ここで，$\mathbf{L}_{ij}$ は式 (3) に対する微分作用素，$\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})$ は，Dirac のデルタ関数である．基本特異解は，

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\beta}(\mathbf{x};\mathbf{y})&=\frac{k_{34}}{\rho a}\Bigg[\Big(d_3F(k_3r)-d_4F(k_4r)\Big)\delta_{\alpha\beta}\\&\qquad-\frac{1}{b}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\Big[k_{13}q_3\Big[F(k_1r)-F(k_3r)\Big]-k_{14}q_4\Big[F(k_1r)-F(k_4r)\Big]\Big]\Bigg]\\ \Gamma_{\alpha3}(\mathbf{x};\mathbf{y})&=i\frac{k_{34}j\omega_0^4\varepsilon_{3\alpha\beta}}{\rho a}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\Big[F(k_3r)-F(k_4r)\Big],\qquad \Gamma_{3\alpha}(\mathbf{x};\mathbf{y})=-\Gamma_{\alpha3}(\mathbf{x};\mathbf{y}),\\ \Gamma_{33}(\mathbf{x};\mathbf{y})&=\frac{k_{34}}{\rho ja}\Big[h_3F(k_3r)-h_4F(k_4r)\Big]\end{aligned}\tag{5}$$

ここで,

$$k_{ij} = \frac{1}{k_i^2 - k_j^2}, \quad r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad a = c_4^2(c_2^2 + c_3^2), \quad b = c_1^2 + c_3^2$$

$$d_i = c_4^2 k_i^2 + 2\omega_0^2 - \omega^2, \quad h_i = (c_2^2 + c_3^2)k_i^2 - \omega^2, \quad q_i = d_i(c_1^2 - c_2^2) + j\omega_0^4$$

とした. また,

$$F(k_i r) = -\frac{i}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}(k_i r) \qquad (k_i^2>0), \qquad\qquad \frac{1}{2\pi}\mathrm{K}_0(k_i r) \qquad (k_i^2<0)$$

である. ここで, $\mathrm{H}_0^{(1)}$ は第１種０次の Hankel 関数, K_0 は, 第２種０次の変形 Bessel 関数である. $k_i^2>0$ のときは, F は, 複素関数となり, $k_i^2<0$ のときは, 実数関数となる. また, 変位の基本特異解に対応する応力および, 偶応力をを $\Sigma_{ijk}(\mathbf{x;y})$ とすると, $\eta=\alpha/\beta$ として,

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^{(k)} &= \Sigma_{\alpha\beta k}(\mathbf{x;y}) = \rho(c_1^2 - 2c_2^2)\Gamma_{\lambda k,\lambda}\delta_{\alpha\beta}(\mathbf{x;y}) + \rho(c_2^2 + c_3^2)\Gamma_{\beta k,\alpha}(\mathbf{x;y}) + \rho c_2^2\Gamma_{\alpha k,\beta}(\mathbf{x;y}) - \rho j\omega_0^2\epsilon_{3\alpha\beta}\Gamma_{3k}(\mathbf{x;y}) \\ \mu_{\alpha 3}^{(k)} &= \Sigma_{\alpha 3k}(\mathbf{x;y}) = \frac{\rho j c_5^2}{1+\eta}\Gamma_{3k,\alpha}(\mathbf{x;y}) \end{aligned} \tag{6}$$

となる. ただし, k=1,2 は, 物体力, k=3 は, 物体偶力が作用する場合に対応する. 図１，２に基本特異解 Γ_{11} の例を示す. これから, 伝播に方向性があることがわかる. $\rho=1.0$, $c_1^2=4.0$, $c_2^2=2.25$, $c_3^2=1.0$, $c_4^2=3.5$, $c_5^2=1.0$ として, $j=1.0$ のときを図１に, $j=0.01$ のときを図２に示した.

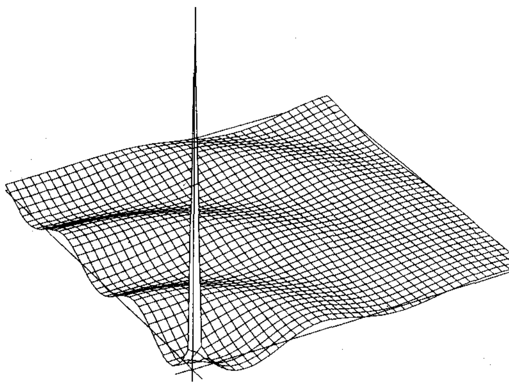

図１　j=1.0 の場合

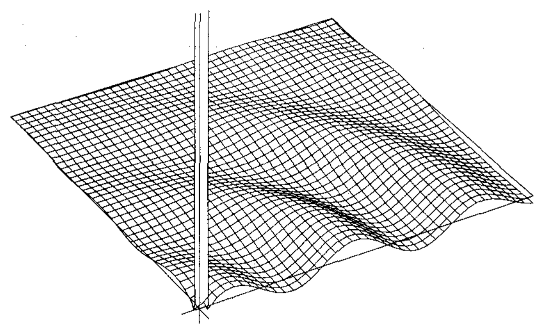

図２　j=0.01 の場合

4. 境界積分方程式

無限のマイクロポーラー弾性体中の空洞による散乱問題に対する解の積分表現は, u_i^I を入射波, B を領域, ∂B を境界, $\overline{B}$ を空洞とすると,

$$C(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x}) = u_i^I(\mathbf{x}) + \int_{\partial B}\Gamma_{ij}(\mathbf{x;y})t_j(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y}) - \int_{\partial B}P_{ij}(\mathbf{x;y})u_j(\mathbf{y})\,dS(\mathbf{y}) \tag{7}$$

となる. ここで, $\Gamma_{ij}(\mathbf{x;y})$ は, 式 (5) で与えられる基本特異解であり, $P_{ij}(\mathbf{x};\mathbf{y}) = n_\alpha(\mathbf{y})\Sigma_{\alpha ji}(\mathbf{y};\mathbf{x})$ である. また, $C(\mathbf{x})$ は, 境界 ∂B が滑らかであるとすると, $\mathbf{x}\in B$ のとき１，　$\mathbf{x}\in\partial B$ のとき 1/2 , $\mathbf{x}\in\overline{B}$ のとき 0 である [2]. 点 $\mathbf{x}$ が境界上にあるとき, (7) は境界積分方程式となる. なお, 変位 u_i の添え字が 3 のときは, u_3 でなく ϕ_3 をとるものとする. t_i についても同様に定義する.

解析の詳細については当日発表する.

参考文献

(1) Eringen, A.C, Theory of Micropolar Elasticity., in *Fracture* , ed. H.Liebowitz, Vol.2, ch.7, Academic Press, (1968)

(2) 境界要素法研究会編, 境界要素法の応用, 第２章　弾性波動問題への応用, コロナ社 (1987)