

CS 3-13 [I] ALE 有限要素法による自由表面を有する流れと構造との連成系の解析

東京大学大学院 学生員 布施光啓
 東京大学 正会員 野村卓史

1 はじめに

自由表面を有する流れの問題は、河川の流れや燃料タンク内のスロッシング現象など工学上重要な問題を含んでいるが、境界条件が非線形で境界位置が時間的に変化するなど困難が伴う。また、加振時における TLD 内の波動を数値解析するためには、容器とともに移動する境界も同時に扱う必要がある。本研究では、このような観点から ALE 有限要素法を用いて自由表面を有する流れと構造の相関問題を解析することを試みた。

2 計算方法

本研究の解析対象は図1に示すような弾性支持された水入りの2次元剛体容器であり、その運動方程式は1自由度である。また、流体の支配方程式は非圧縮2次元の Navier-Stokes の方程式及び連続の式であり、その境界は容器壁面と自由表面に分けることができ、それぞれに力学的境界条件、幾何学的境界条件が課される。Navier-Stokes の方程式に ALE 法を導入し、重み付き残差法を適用して、混合補間を施し、有限要素方程式を導く。本研究では流速に関して要素内双線形、圧力に関しては要素内一定に分布する4節点アイソパラメトリック要素を用いた。この流体の有限要素方程式と容器の運動方程式を連成し、時間積分には Predictor-corrector 法を適用した。

3 自由表面の取扱い

ALE 法では自由表面を变形するメッシュの境界で表現する。そのとき、自由表面の幾何学的境界条件、すなわち、流体粒子が常に自由表面上にとどまっているという条件は次のように表せる。

$$(u - \hat{u})n_x + (v - \hat{v})n_y = 0 \tag{1}$$

ただし、 u, \hat{u}, v, \hat{v} はそれぞれ x, y 方向の流速、メッシュ速度、 n_x, n_y は方向余弦である。(図2) また、本研究では便宜上、節点は容器に対して鉛直方向のみに移動させることにするので、全節点にわたって \hat{u} は容器の速度に一致させ、 \hat{v} は表面と底面の間で線形な速度分布とする。方向余弦 n_x, n_y は隣接節点間の法線ベクトルを節点間距離に関する加重平均として算出した。

自由表面位置 y の基礎式は、時間ステップ $t_n \sim t_{n+1}$ において、 $y^{n+1} = y^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \hat{v} dt$ であるが、この式の右辺を評価する方法として以下の3スキームを考える。

- スキーム1: 陽的オイラー法 $y^{n+1} = y^n + \Delta t \hat{v}^n$
- スキーム2: 高次の陽的近似 $y^{n+1} = y^n + \Delta t \hat{v}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \hat{b}^n$
 $\hat{b}^n = \hat{v}^n$ (メッシュ加速度)

スキーム3: Predictor-corrector 法 時刻 t_{n+1} において式(1)もしくは、その時間微分の式を満たすことを目標として、反復計算する陰的なスキームである。

$$\begin{aligned} (1) \text{Predictor} \quad & \hat{b}^{n+1(0)} = 0 \\ & \hat{v}^{n+1(0)} = \hat{v}^n + \Delta t(1 - 2\gamma)\hat{b}^n \\ & y^{n+1(0)} = y^n + \Delta t \hat{v}^n + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\hat{b}^n \end{aligned}$$

(2) 自由表面の幾何学的境界条件式(1)との残差 $s^{n+1(i)}$ を計算

$$\begin{aligned} (3) \text{Corrector} \quad & \hat{b}^{n+1(i+1)} = \hat{b}^{n+1(i)} + s^{n+1(i)} \\ & \hat{v}^{n+1(i+1)} = \hat{v}^{n+1(i)} + \gamma \Delta t s^{n+1(i)} \\ & y^{n+1(i+1)} = y^{n+1(i)} + \beta \Delta t^2 s^{n+1(i)} \end{aligned}$$

(2)(3)は2回繰り返す。 β, γ は時間積分の精度の安定性を制御するためのパラメーターである。

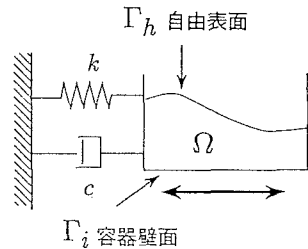


図1 解析対象

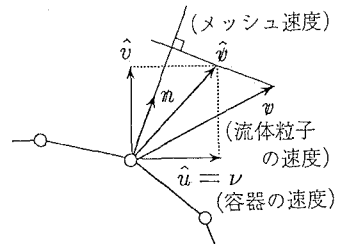


図2 流速とメッシュ速度の関係

4 数値計算例

(1) 上述の3スキームを用いて、静止容器内における微小振幅波理論によるポテンシャル流の液面自由振動を計算し、理論解と比較した。静止状態で幅60(cm)、深さ15(cm)の流体を仮定し、節点数91、要素数72で等間隔にメッシュを切った。振動は1次のモードを想定し、壁面での初期変位として0.01(cm)(水深比0.7%)を与え、自由振動させた。境界条件は容器壁面上でスリップとし、時間積分間隔は0.01(s)とした。

図3にそれぞれのスキームによる壁面水位の時刻歴を示す。スキーム1では時間とともに振幅が増大しており、陽的オイラー法に見られる不安定性が顕著に現れている。スキーム2では近似の精度を1次あげることによりかなり精度が向上しており、ほぼ理論解と一致しているが、やはり陽的解法であるため4周期目から振幅増大の兆しが見られる。スキーム3の計算結果では、理論解との一致具合はスキーム2とほぼ同程度であるが、振幅の増大は抑えられ、ほとんど見られなくなり、スキーム1、スキーム2からは本質的に改善されたと言える。

スキーム3で、比較的流体の運動が大きくなる水深比30%の初期条件を与えて計算したところ、時間とともに増加する体積誤差が発生しているのが認められた。反復計算の各繰り返し段階における体積誤差を計算した結果、Predictorにおける誤差が支配的影響を及ぼしていることが分かり、改善策としてPredictorの段階で全体から誤差を均等に減じたところ、誤差の増大を抑えられることが確認できた。

(2) 体積補正を施したスキーム3を用いて、流体-構造連成自由振動の数値解析を行い、実験結果と比較した。その際、構造系と流体の固有周期は一致させておき(1.3(s))、容器に初期変位(0.275(cm))のみを与えて自由振動させた。使用したメッシュは幅40(cm)、水深4(cm)を2106節点、2000要素に分割し、水平方向は等間隔、鉛直方向は表面から底面にかけて細かくした。境界条件は側壁でスリップ、底面でノンスリップとし、時間積分間隔は0.001(s)とした。実験と等価な構造系の緒定数は、質量 $7.71 \times 10^2(kg)$ 、ばね定数 $1.74 \times 10^6(kg/s^2)$ 、減衰 $0.707(kg/s)$ である。

図4に容器壁面の波高と容器変位の時刻歴を示す。実験結果と計算結果を比較すると両項目において、振動の振幅が増減するビート現象を起こしていること、また、波高に関しては、4波目以降に見られる細かい波など非線形性の影響を捉えている点で定性的にはよく一致していると言える。しかし、定量的に見てみると波高のピーク値は実験と計算で開きが見られる。原因としては容器側壁で境界条件をスリップにしたこと、実験時の測定誤差などが考えられるが、前者の原因は今後、十分改善の余地があるところであろう。

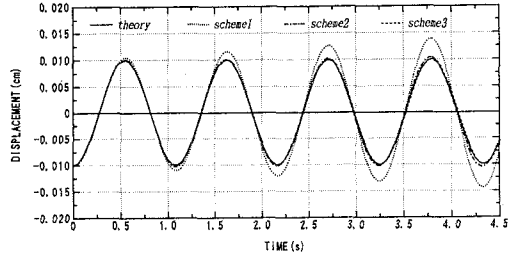
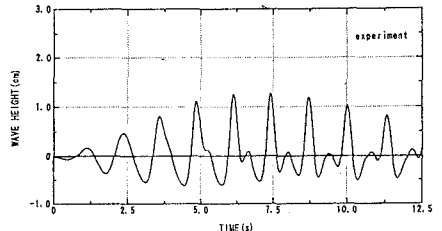
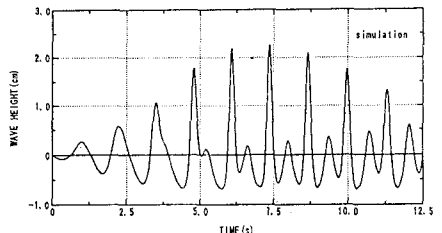


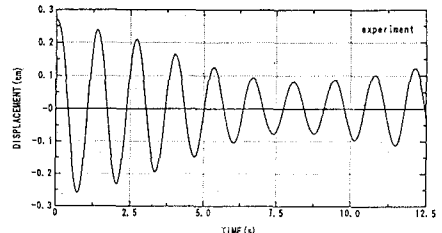
図3 壁面水位の時刻歴



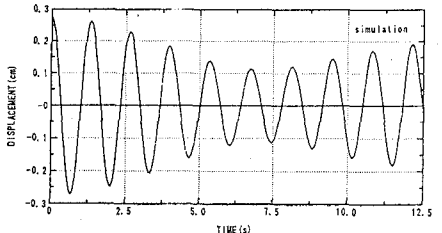
壁面波高（実験）



壁面波高（計算）



容器変位（実験）



容器変位（計算）

図4 壁面波高と容器変位の時刻歴

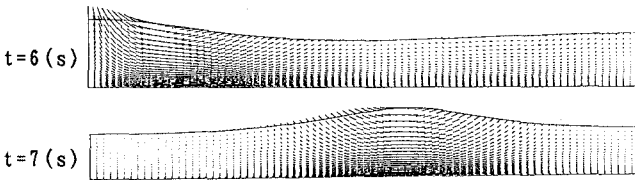


図5 流速ベクトル図