

I-PS13 多点計測による振動数増幅関数の算定法について

日本大学 学生員 橋本和佳 正員 花田和史  
 学生員 武田修治 正員 鈴村順一

1. 目的 実験・観測において計測される量は応答と解釈されるため、ここでは振動数応答関数(FRF)を振動数増幅関数(FAF)と表現している。本報告は、雑音の混じった多点の応答より FAF を算定する手法について考察することを目的としている。

2. FRF と FAF  $G_{xy}$  を時系列  $x$  と時系列  $y$  のクロススペクトル、 $h_{yx}$  を  $x$  に対する時系列  $y$  の FRF とする。図1を参照して、(1)~(3)式の FRF が知られている。

$$G_{xy} = {}_1h G_{xx} \quad (1)$$

$$G_{yy} = {}_2h G_{yx} \quad (2)$$

$$G_{yy} = {}_3h^* {}_3h G_{xx} \quad (3)$$

ここに右肩の\*は共役操作を表している。 ${}_1h$  は真の FRF の下方推定値を、 ${}_2h$  は上方推定値を与える。Rocklin は  ${}_1h$  と  ${}_2h$  の幾何平均である  ${}_3h$  によって FRF の推定精度を向上できると説明している<sup>1)</sup>。FAF として常時微動解析では  ${}_3h$  が用いられることが多い<sup>2)</sup>。

図2に示すように、入力  $x_0$  が系に作用し、応答  $x_j (j=1 \sim N)$  と雑音  $n_j$  の時系列  $y_j = x_j + n_j$  を計測する場合を設定する。 $y_k$  と雑音  $n_i$  のクロススペクトルを  $N_{kn_i}$  とおくと、次の関係が成立する。

$$G_{ki} - N_{kn_i} = h_{k0} G_{k0} \quad (4)$$

雑音間のクロススペクトル  $N_{ki}$  と信号-雑音間のクロススペクトルは小さくはなるが、残差  $v$  として残り、(5)式が得られる。

$$\begin{aligned} (G_{jj} - N_{jj})g_j - G_{jk}g_k &= v_{jjk} \\ G_{jk}g_k - G_{ji}g_i &= v_{jki} \end{aligned} \quad (5)$$

ここに  $g_j$  は  $h_{j0}$  の逆数、 $g_k/g_i$  は  $k$  点に対する  $i$  点の FAF を表している。いま、 $\sigma_{jj} = N_{jj}/G_{jj}$  とし、 $\sigma = \sigma_{kk} = \sigma_{ii} = \dots$  とおけば、残差の2乗和を最小とする  $g_j$  は次の固有値方程式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma^2 M + \sigma C + K)g &= 0 \\ \text{ここに } M &= \text{diag}((N-1)G_{11}^* G_{11}), C_{11} = 2(N-1)G_{11}^* G_{11}, C_{jj} = G_{j1}^* G_{1j} + G_{j1}^* G_{jj}, \\ K_{11} &= (N-1)\sum G_{k1}^* G_{k1}, K_{jj} = -\sum G_{ki}^* G_{kj}, g = (g_1, g_2, \dots, g_N)^T, \\ \Sigma &: k=(1, 2, \dots, N) \text{ についての総和} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

雑音のパワースペクトルを定める最小の固有値  $\sigma$  を選べば、対応する固有ベクトルによって FAF  ${}_3h$  が決定される。

3. 数値例と考察 本手法によって得られる FAF を検討するために図3の2質点系を設定し、 $x_1$  を入力と

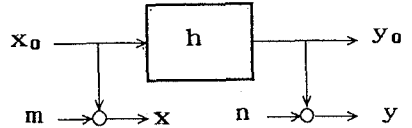


図1 1入力1出力系

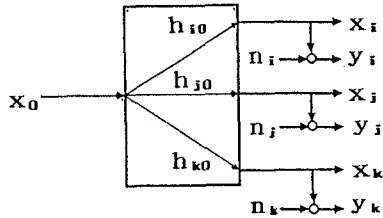


図2 不明な入力作用する多出力系

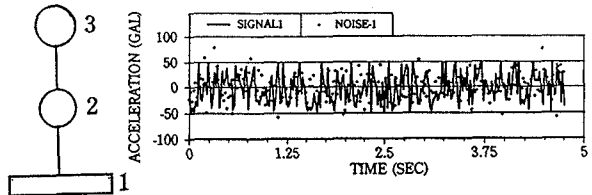


図3 検証用モデルと1点での信号および雑音の時系列

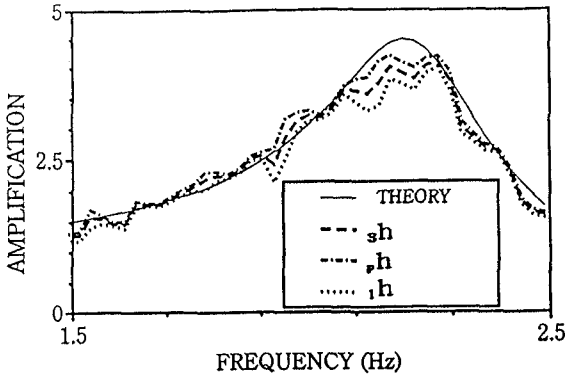


図4  $i_h, s_h, p_h$ によるFAF ( $h_{21}$ )

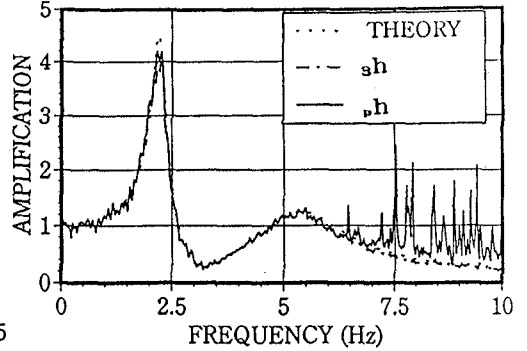


図5  $s_h, p_h$ によるFAF ( $h_{21}$ )

して2質点の時系列応答  $x_2, x_3$  (時系列  $x_j$  の観測時間内の標準偏差を  $s_j$  とする) を得た。また分散が1である正規乱数  $r_j$  を発生させ、計測誤差を  $n_j = \alpha s_j r_j$  として与えた。 $\alpha=0.8$  の場合の  $x_1$  と  $n_1$  を図3に併せて示している。

16回の計測より得られる各FAFの算定例を図4に示す。 $i_h$  は理論値より下方を推定し、 $s_h$  はかなり良好な精度で理論曲線を推定しているが、 $p_h$  の精度が最も良好である。計測が  $y_2, y_3$  のみであれば、 $s_h = p_h$  が得られる。ところが振動数範囲を拡大すると、図5に示す  $p_h$  が得られ、高振動数域では極端に精度が劣化する。図6は、 $p_h$  の固有値を示している。本図によれば  $p_h$  の推定精度が悪化したのは、正の実数であるべき固有値として複素数が得られている理由によると判断される。因みに  $s_h$  で得られる雑音のパワー値を固有値に換算すると同図に併せて示しているように、対応する振動数で急激に増大しているが、実数部のみで得られている。

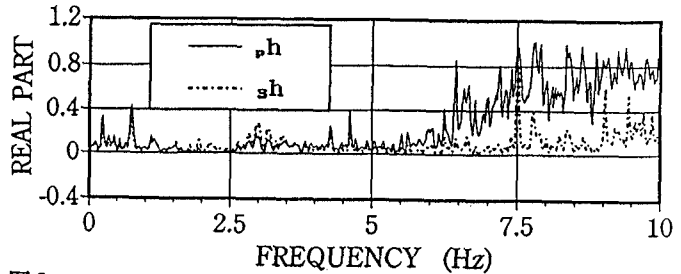


図6-a  $s_h$  の換算個有値および  $p_h$  の最小個有値の実部

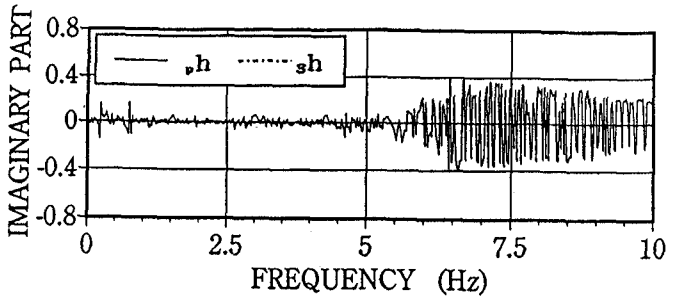


図6-b  $s_h$  の換算個有値および  $p_h$  の最小個有値の虚部

**4. 結論** 複素固有値が得られるのは、 $x_k$  と  $n_k$  のクロススペクトルが無視できるほど十分に小さくない場合である。今後、(6)式の  $\sigma$  を計測点の関数とすることによって実固有値に拘束するよう検討を続ける予定である。

参考文献

- 1) Rocklin G., et al "A Comparison of  $H_1, H_2, H_n$  Frequency Response Functions" Proc. of 3rd IMAC, 1986
- 2) 例えば、鳥野清「常時微動測定による構造物の振動特性解析に関する研究」1977 九州大学学位論文