

○名古屋大学 学生会員 村中健二  
名古屋大学 正会員 田辺忠顕

1. はじめに

原子炉を支持するベースマットと格納施設の一体的な応力解析の問題のように、構造物全体として板的挙動だけでなく局所的に三次元挙動を示す場合の解析をする必要がしばしば生ずる。このような構造物の解析をする場合、従来の一般的な有限要素法解析では、データ作成が極めて煩雑となり、また、計算機使用の経済性に於て不利となる。そのため、複雑な板形状をしたRC構造物を大きな板要素とそれを補う局所的な三次元要素の結合体として考え、自由度を減らした解析を行うことが必要とされる。

そこで、本研究においては、ラグランジュ未定乗数を用いて異自由度を有する板曲げ要素と三次元要素に対する結合の定式化を行った。

2. ラグランジュの未定乗数法による定式化

異なる自由度を有する2つの要素を結合する場合に、その仮想の境界面上での両要素の変位差が零になる条件をラグランジュの未定乗数法を用いて表すと次の変分式が得られる。

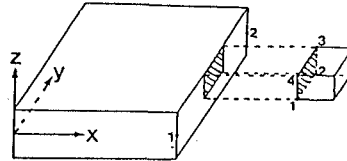


図1 結合の概念図

$$\sum_{\alpha=1}^2 \delta \{ \Delta q^{(\alpha)} \}^t [ [K^{(\alpha)}] \{ \Delta q^{(\alpha)} \} + [\hat{K}^{(\alpha)}] \{ \Delta \gamma \} + \{ \Delta F^{(\alpha)} \} ] + \delta \{ \Delta \gamma \}^t \sum_{\alpha=1}^2 [ \hat{K}^{(\alpha)} ]^t \{ \Delta q^{(\alpha)} \} = 0 \quad (1)$$

ここで、

$$[\hat{K}^{(1)}] = - \int_{S^{(12)}} [\Psi^{(1)}] [\Omega] dS \quad [\hat{K}^{(2)}] = \int_{S^{(12)}} [\Psi^{(2)}] [\Omega] dS \quad (2)$$

ただし、( )内の添字  $\alpha=1$  は板要素、 $\alpha=2$  は三次元要素を示し、 $S^{(12)}$  は仮想境界面を示す。また、 $[K^{(\alpha)}]$  ( $\alpha=1, 2$ ) はそれぞれの要素の剛性マトリクス、 $[\hat{K}^{(\alpha)}]$  ( $\alpha=1, 2$ ) はそれぞれ板要素領域と三次元要素領域での結合に関するマトリクスを示す。

なお、 $[\Psi^{(\alpha)}]$  ( $\alpha=1, 2$ ) は、 $S^{(12)}$  と  $V^{(1)}$ 、 $V^{(2)}$  を結合する結合要素の補間マトリクスであり、さらに  $S^{(12)}$  上のラグランジュ未定乗数  $\{ \Delta \lambda \}$  は補間マトリクスによりつぎのように補間される。

$$\{ \Delta \lambda \} = [\Omega] \{ \Delta \gamma \}$$

ここに、 $\{ \Delta \gamma \}$  は  $S^{(12)}$  上の結合要素に関する一般化座標の列マトリクスである。

さて、 $\delta \{ \Delta q^{(\alpha)} \}$  と  $\delta \{ \Delta \gamma \}$  は任意の値を持つことにより変分をとると、平衡方程式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} [K^{(1)}] & [0] & [\hat{K}^{(1)}] \\ & [K^{(2)}] & [\hat{K}^{(2)}] \\ sym. & & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{ \Delta q^{(1)} \} \\ \{ \Delta q^{(2)} \} \\ \{ \Delta \gamma \} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{ \Delta F^{(1)} \} \\ \{ \Delta F^{(2)} \} \\ \{ 0 \} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

3. 板要素と立体要素の結合

板要素とそれに付帯した立体要素から成るモデルを考え、板要素に関しては、節点自由度3 (z方向変位、x, y方向回転角) をもつ板曲げ要素を用い、立体要素に対しては、節点自由度3 (x, y, z方向変位) をもつアイソパラメトリック要素とすると、異自由度を有する両要素の結合を考える必要が生じる。そこで、上記のラグランジュ未定乗数法により両要素の結合を行った。

板要素と立体要素の結合に対しては、結合要素の補間マトリクス  $\Psi^{(1)}$ 、 $\Psi^{(2)}$  は次のように仮定できる。

$$[\Psi^{(1)}] = \begin{bmatrix} -z \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial N_3}{\partial x} & -z \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 & -z \frac{\partial N_6}{\partial x} \\ -z \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & -z \frac{\partial N_3}{\partial y} & -z \frac{\partial N_4}{\partial y} & 0 & -z \frac{\partial N_6}{\partial y} \\ N_1 & 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$[\Psi^{(2)}] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_1 & 0 & 0 & \varphi_2 & 0 & 0 & \varphi_3 & 0 & 0 & \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 $N_1, N_3, N_4, N_6$ はそれぞれ $w^1, \theta_y^1, w^2, \theta_y^2$ に対する板曲げ要素の形状関数で、 $\phi_i$ は2次元4節点のアイソパラメトリック要素の補間関数である。

次にラグランジュ未定乗数は、 $x, y, z$ 方向変位に対応する3つの量を考え、 $\{\Delta\lambda\}, [\Omega]$ を次のように仮定した。

$$\{\Delta\lambda\} = \{\lambda^u \ \lambda^v \ \lambda^w\}^t \quad (6)$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

#### 4. 解析モデル

以上の理論を用いて板要素と三次元要素の結合に関する基礎的研究として図2に示す数値モデルを解析した。板の大きさは、 $100\text{cm} \times 100\text{cm} \times 20\text{cm}$ で、三次元要素の大きさは、 $10\text{cm} \times 10\text{cm} \times 10\text{cm}$ である。ここで、板側節点1、2の $z$ 方向変位と $y$ 軸回りの回転 $\theta_x$ を拘束し、荷重は三次元要素側節点1、2の $z$ 軸方向に、各-1000kgを加えた。

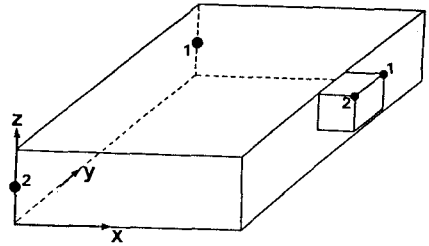


図2 解析モデル

#### 5. 解析結果

##### 5.1 板要素と三次元要素の結合状態

ラグランジュの未定乗数法を用いて、板要素と三次元要素を結合させた結果、精度良く結合することができた。表1は板要素と三次元要素の両方が自由度としてもつ $z$ 方向変位を、図3に示す位置で求めたものである。

表1 結合状態

板側変位 ( $z$ 軸方向)(cm)	三次元要素側変位 ( $z$ 軸方向)(cm)	誤差(%)
-0.54613D-01	-0.54654D-01	0.1

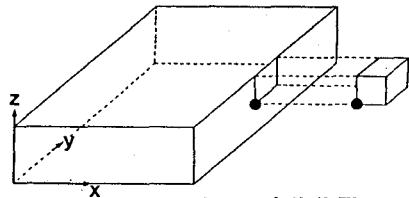


図3 求めた変位位置

##### 5.2 MARCとの比較

一般に有限要素解析に用いられる汎用プログラムMARCで、92要素の立体要素に分割した結果との比較を行った。図4に本研究の結果による変位図とMARCの計算結果による変位図を併せて示す。

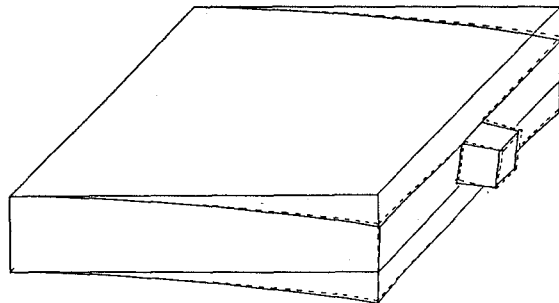


図4 変位図(実線:本研究による変位図、点線:MARC)

#### 6. 結論

本研究では、当初、ラグランジュ乗数を結合面内で一定としていたが、精度の落ちることが判明し、上記のような、より精緻な補間によって、精度を向上させることができた。

7. 参考文献 矢川元基、渡辺隆之、石渡 俊:ラグランジュ乗数法を用いた効率的な弾塑性構造解析用プログラム"EPAS"の開発と応用、日本機学会論文集(A編),1980,pp.87-96