

V-22

逆解析から得られる弾性係数の  
推定値と信頼区間

東京電機大学 学生員○佐藤直俊 東京電機大学 正員 松井邦人  
日本舗道㈱ 正員 井上武美 日本舗道㈱ 正員 三瓶辰之

1. はじめに

FWD 等の非破壊試験により舗装の構造評価を行うとき、計測した表面たわみから層弾性係数を推定している。この時推定値に影響する因子は、1)たわみセンサーとその設置位置、2)モデルの変動、3)荷重分布と大きさ、等がある。表面たわみから層弾性係数を推定する手法は開発されているが、その推定値は、種々のばらつきを反映した結果である。よって、ここではその推定値の信頼区間を求める方法を誘導し、信頼区間が測点数とそれ等の位置によりどの様に変動するかを検討する。

2. 測定表面たわみのばらつき

測点*i*におけるたわみを $u_i$ 、*R*回測定を繰り返したときの平均値を $\bar{u}_i$ 、標準偏差を $s_i$ とすると、

$$\bar{u}_i = \frac{1}{R} \sum_{j=1}^R u_i \quad (1)$$

$$s_i^2 = \frac{1}{R-1} \sum_{j=1}^R (u_i - \bar{u}_i)^2 \quad (2)$$

また $\bar{u}_i$ の期待値は

$$E(\bar{u}_i) = \delta_i \quad (3)$$

分散は、

$$\text{Var}(\bar{u}_i) = \frac{s_i^2}{R} \quad (4)$$

従って標準偏差は $s_i/\sqrt{R}$ で表せる。変数 $(\bar{u}_i - \delta_i)/(s_i/\sqrt{R})$ は自由度(*R*-1)の*t*分布に従うから $\delta_i$ に関する信頼度 $1-\alpha$ の信頼区間は、

$$\langle \delta_i \rangle_{1-\alpha} = (\bar{u}_i - t_{\alpha/2, R-1} \frac{s_i}{\sqrt{R}}, \bar{u}_i + t_{\alpha/2, R-1} \frac{s_i}{\sqrt{R}}) \quad (5)$$

で表される。

3. 推定範囲の求め方

弾性係数の推定値は、測定たわみが解析たわみと一致するように決定すると良い。数学的には評価関数

$$J = \sum_{i=1}^N \{u_i - z_i(\mathbf{X})\}^2 \quad (6)$$

を最小化にすることになる。これは非線形問題であるため、繰り返し計算を必要とする。Gauss-Newton法を用いると

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{\partial z_i}{\partial X_j} \frac{\partial z_i}{\partial X_k} \delta X_j = \sum_{i=1}^N \frac{\partial z_i}{\partial X_k} \{u_i - z_i(\mathbf{X})\} \quad (k=1, 2, \dots, M) \quad (7)$$

式(7)より $\delta X_j$ を求めることができる。この計算を繰り返すことにより決定することができる。 $\mathbf{X}$ は当然表面たわみとそれに含まれる誤差を反映している。従って、

$$X_j = X_j(u + \delta u), \quad (j=1, \dots, M) \quad (8)$$

と書くことができる。ここに $u, \delta u$ は測点*i*における真のたわみと誤差であるとする。 $u$ の値は測点の間で相関がある。しかし $\delta u$ には相関がないと仮定してよい。すると式(8)をTaylor展開して

$$X_j(u + \delta u) = X_j(u) + \frac{\partial X_j}{\partial u} \delta u, \quad (j=1, \dots, M) \quad (9)$$

式(9)の右辺第1の項目は、 $X_j$ の真値であり、第2項目は測定誤差の影響と考えることができる。たわみのばらつきがモデルの変動に帰因しているとき $X_j$ の不偏分散は

$$\text{Var}(X_j) \approx \frac{1}{N-M} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial X_j}{\partial u_i} \right)^2 S_i^2 \quad (10)$$

たわみセンサーに原因があるとき、たわみの平均値の分散を用いて、 $X_j$ の不偏分散は

$$\text{Var}(X_j) \approx \frac{1}{N-M} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial X_j}{\partial u_i} \right)^2 \frac{S_i^2}{R} \quad (11)$$

ここで、式(10)、(11)より

$$\langle X_j \rangle_{1-\alpha} = (X_j - t_{\alpha/2, R-1} \sqrt{\text{Var}(X_j)}, X_j + t_{\alpha/2, R-1} \sqrt{\text{Var}(X_j)}) \quad (12)$$

式(10)、(11)の $\partial X_j / \partial u_i$ の計算は次の式で行うことができる。

$$\sum_{i=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{\partial z_i}{\partial X_j} \frac{\partial z_i}{\partial X_k} \kappa_{jkl} = \frac{\partial z_i}{\partial X_k} \quad (k=1, \dots, M) \quad (13)$$

ここに

$$\kappa_{jkl} = \frac{\partial X_j}{\partial u_l} \quad (14)$$

$\kappa_{jkl}$ が測点*l*に含まれる誤差が、 $X_j$ に及ぼす影響度であり、誤差に対する感度と呼んでいる。

4. 例題

対象を図-1に示すように3層構造とする。各測点におけるたわみの変動係数を $S_i/\bar{u}_i = 0.02$ として、

測点間隔を20cmと40cmについて測点数を4点から15点まで変化した時、自由度(R-1=4)の弾性係数の90%および95%の信頼性領域を図2,3示す。これらの図はモデルの変動がたわみ分布に現れていると解釈できる。一方モデルが変動しないと考えられることができるとき、測定回数が増加するとたわみ平均値の信頼性は向上する。測点間隔20cm、測点数N=7としたとき、弾性係数の90%及び95%の信頼性領域と計測回数Rの関係を図-4に示す。

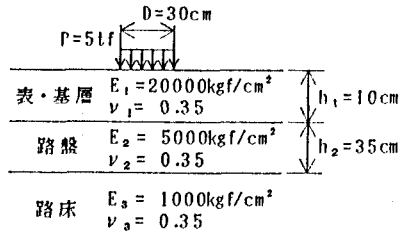


図-1 3層構造モデル

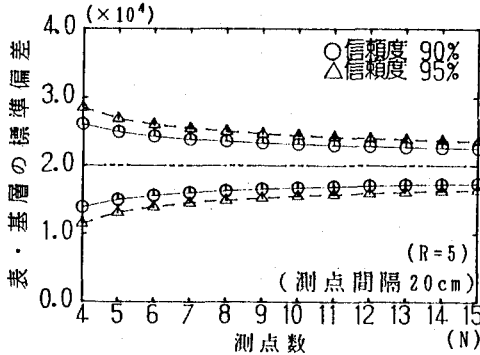


図-2 ばらつきがモデルに帰因する時の弾性係数の信頼区間

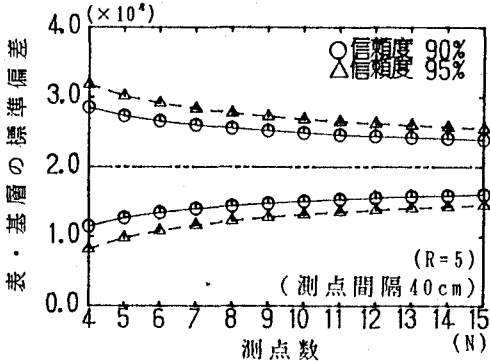
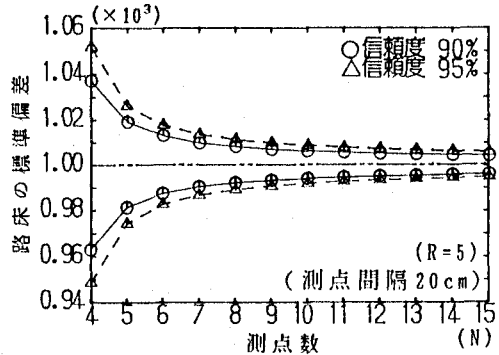
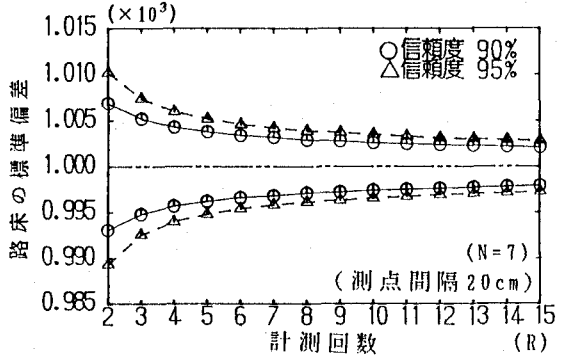
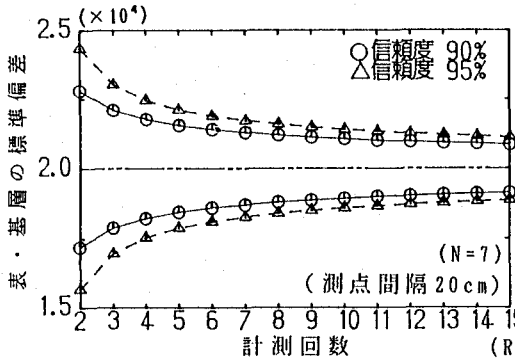
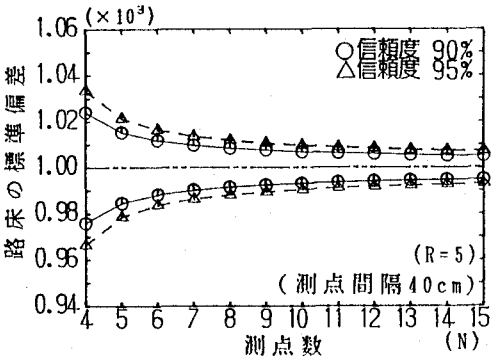


図-3 ばらつきがモデルに帰因する時の弾性係数の信頼区間



5) あとがき 図-4 ばらつきが測定値に帰因する時の弾性係数の信頼区間

測定たわみのばらつきが、モデル自体の変動に帰因する場合と、たわみセンサーの精度に帰因する場合で信頼度が同じであると推定弾性係数の信頼区間が異なることを解析的に示した。