土木学会第46回年次学術講演会（平成３年９月）

Ⅳ-282　測量網の図形調整結果からＦｒｅｅ　Ｎｅｔｗｏｒｋ解の誘導
－距離測量網の場合－

岡山大学工学部　正会員　○　森　忠次
寒河江工業高等学校　正会員　町田　憲一

§１．まえがき

free network 解はつぎのような優れた特徴を持っている。①実施した観測量だけを用いて、当該の測量自身の責任範囲内での誤差を推定することができる（すなわち観測量及び観測量の最確値の標準誤差など）。②当該観測量のみを用いて、測点座標の分散の平均値が最小となる解が得られる。このときの座標誤差が他の測量との座標誤差を比較するときの量として使用できる。③観測した測点が座標既知点であれば、その座標と free network 解で得られた測点座標との差の２乗和を最小とするように、測点座標を決めることができる。

このようなことから、free network 解法は、基準点測量の方面でかなり古くから注目されていたが、工事測量の方面で話題になることが少なかった。その理由は、この解の誘導が座標調整法（観測方程式法）に基づいて説明されていることと、一般逆行列が適用されていることにあると考えられる。そこで、土木工学関係の測量学の本に必ず紹介されている図形調整法（条件式法）による測量網の調整結果を利用すれば、少しの計算で free network 解が得られるという説明を、距離のみを測った測量網について示すことにする。

§２．図形調整

ここでは、以下の説明を簡単にするために必要に応じて、図１の距離測量網を例にとることにする。観測量$\mathbb{l}$，最確値$\hat{\mathbb{l}}$，残差$\mathbb{V}$とするとき、次の条件式（線形にしたもの）が成立する。

$$\Phi = \mathbb{A}\mathbb{V} + \mathbb{W} = 0, \quad \mathbb{W} = -\mathbb{A}\mathbb{l} + \mathbb{A}_0 \qquad (1)$$

ここで、観測量の重みを$\mathbb{P}$とするとき、$\mathbb{V}^T\mathbb{P}\mathbb{V}$ ＝min. を満足する解を求めると、結果は周知のとおりつぎのようになる（ｒは条件式数）。

$$\hat{\mathbb{l}} = \mathbb{l} - \mathbb{V} = (\mathbb{E} - \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}^T\mathbb{N}^{-1}\mathbb{A})\mathbb{l} + \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}^T\mathbb{N}^{-1}\mathbb{A}_0 \qquad (\mathbb{N} = \mathbb{A}\mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}^T) \qquad (2)$$

観測量の分散共分散行列：$\Sigma_{\hat{l}\hat{l}} = \mathbb{Q}_{\hat{l}\hat{l}} \cdot \sigma_0^2$　（３）

$$\mathbb{Q}_{\hat{l}\hat{l}} = \mathbb{P}^{-1} - \mathbb{P}^{-1}\mathbb{A}^T\mathbb{N}^{-1}\mathbb{A}\mathbb{P}^{-1}, \qquad \sigma_0^2 = \mathbb{V}^T\mathbb{P}\mathbb{V}/r \qquad (4)$$

§３．Ｆｒｅｅ　Ｎｅｔｗｏｒｋ解の誘導

ここでは、すべての測点の座標に拘束条件が存在しないときを考える。そのときの free network 解は、①図形調整によって得られた形を変えずに、②その測点群の重心を原点とする座標系を選んだときの解であると定義する。この意味の解説を省略し、解法を説明する。

図形調整結果を任意の座標系に置いたときの測点座標（x_j，y_j），その free network 解の測点座標（$\hat{x}_j$，$\hat{y}_j$），補正（δx_j，δy_j），測点ｊ，ｋ間の距離（l_{jk}）に関して上記の条件①はつぎのようになる。

$$\Psi_{jk} = (\hat{x}_k - \hat{x}_j)^2 + (\hat{y}_k - \hat{y}_j)^2 - \hat{l}_{jk}^2 = 0 \qquad (5)$$

これを線形にしたもの（多数存在すると考えておく）をつぎの形に書く。

$$\Psi = \mathbb{B}\,\delta\mathbb{x} + \mathbb{B}_0,$$
$$\delta\mathbb{x}^T = (\delta x_1\ \delta y_1\ \delta x_2\ \delta y_2 \cdots\cdots), \quad \mathbb{B}_0 = \hat{\mathbb{l}} - \mathbb{l}, \quad \mathbb{l}\text{は近似値}. \qquad (6)$$

拘束条件（６）のもとで条件②、すなわち、

$$\Sigma(\hat{x}_j^2 + \hat{y}_j^2) = \Sigma(x_j + \delta x_j)^2 + \Sigma(y_j + \delta y_j)^2 = (\mathbb{x} + \delta\mathbb{x})^T(\mathbb{x} + \delta\mathbb{x}) = min. \qquad (7)$$

を満足するものが求める free network 解であって、それはつぎのようになる。

$$\hat{\mathbb{x}} = \mathbb{B}^T(\mathbb{B}\mathbb{B}^T)^{-1}(\hat{\mathbb{l}} - \mathbb{l}) + \mathbb{B}^T(\mathbb{B}\mathbb{B}^T)^{-1}\mathbb{B}\mathbb{x} \qquad (8)$$

測点座標の分散共分散行列：　$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = Q_{\hat{x}\hat{x}} \cdot \sigma_0^2$　（９）

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = B^T(BB^T)^{-1} Q_{\hat{l}\hat{l}} (BB^T)^{-1} B \tag{10}$$

§４．計算例

図１の例において、４測点は正方形を形成するものとする。観測値は　$l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = l_0$, $l_5 = l_6 = \sqrt{2}\, l_0$，$P = E$ とする。図形調整の結果は表１のようになる。

これを図１の座標系で表すと、図１に示す測点座標となるので、以上を出発点として free network 解を求めてみよう。

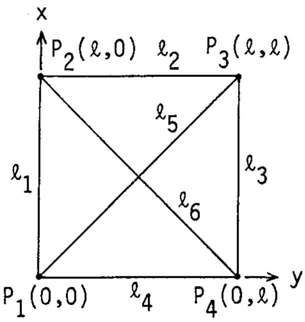

図１　距離測量網

表１　$Q_{\hat{l}\hat{l}}$ の値（単位：１／８）

	$\hat{\ell}_1$	$\hat{\ell}_2$	$\hat{\ell}_3$	$\hat{\ell}_4$	$\hat{\ell}_5$	$\hat{\ell}_6$
$\hat{\ell}_1$	7					
$\hat{\ell}_2$	-1	7			（対称）	
$\hat{\ell}_3$	-1	-1	7			
$\hat{\ell}_4$	-1	-1	-1	7		
$\hat{\ell}_5$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	6	
$\hat{\ell}_6$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-2	6

図形を不変に保つための条件式（６）として、$l_1 \sim l_5$の長さが不変であるという５個を選ぶと、式（６）はつぎのようになる。

$$F = B\,\delta x + B_0 = 0,$$

$$\delta x^T = (\delta x_1\ \delta y_1\ \delta x_2\ \delta y_2\ \cdots\cdots\ \delta y_4)$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} -\hat{l}_1 + l_1 \\ -\hat{l}_2 + l_2 \\ -\hat{l}_3 + l_3 \\ -\hat{l}_4 + l_4 \\ -\hat{l}_5 + l_5 \end{pmatrix}$$

これより free network 解は表２及びつぎのようになる。これらの値は文献［１］の数値と一致する。このように非常に簡便に free network 解が求められる。

$$\hat{x}^T = (-0.5\ -0.5\ 0.5\ 0.5\ -0.5\ 0.5\ -0.5\ -0.5) \times l_0$$

図１において、もし４５°傾いた座標系を選んだ場合についても解いてみた。測点座標の分散の和は

$$\sum_j (\sigma_{x_j}^2 + \sigma_{y_j}^2) = \sum_j Q_{jj} \cdot \sigma_0^2$$

である。この例においても、図１の例においても、ともに$\sum_j Q_{jj}$ ＝１４４である。

表２　$Q_{\hat{x}\hat{x}}$ の値（単位：１／64）

	$\hat{x}_1$	$\hat{y}_1$	$\hat{x}_2$	$\hat{y}_2$	$\hat{x}_3$	$\hat{y}_3$	$\hat{x}_4$	$\hat{y}_4$
$\hat{x}_1$	18							
$\hat{y}_1$	2	18				（対称）		
$\hat{x}_2$	-10	6	18					
$\hat{y}_2$	-6	-6	-2	18				
$\hat{x}_3$	-2	-2	-6	6	18			
$\hat{y}_3$	-2	-2	-6	-10	2	18		
$\hat{x}_4$	-6	-6	-2	2	-10	6	18	
$\hat{y}_4$	6	-10	2	-2	-6	-6	-2	18

文献［１］：日本測量協会：現代測量学，第１巻（田島稔），pp. 285-293, 1981