# Ⅳ-281 最確値の重み係数行列変換への主成分分析法の準用とその結果の利用

寒河江工業高等学校　正会員　町 田 憲 一

## １．はじめに

一般に，平面上の基準点測量網（以下，網という）の精度は，観測器械の性能，観測の良否，観測量の多少，網固有の幾何学的な図形の強さとにより左右される。そして，測量計画立案の段階で網を設計するとき図形の強さは１つの重要な要素になる。

近年，図形の強さの１つの指標として，座標調整のFree Network解法[1)2)]で得られる測点座標Xの重み係数行列$Q_{XX}$を基にした量が採用されている[3)]。しかし$Q_{XX}$の算出には大方になじみの少ない一般逆行列の理論を導入しなければならないなどの幾つかの難点がある[4)5)]。

それで，図形の強さの指標として，図形調整（条件方程式）法で得られる観測量の最確値Uの重み係数行列$Q_{UU}$を基にした量を採ることも考えられる。

その場合，どのような量を導入すればよいか。この問題の解決に先立って，次数の大きい$Q_{UU}$をより少数の量に変換できれば好都合である。それには，主成分分析法[6)]の手法が準用できる。

本文では，以上のことを踏まえて，最初に主成分分析法を概説する。次いで，この手法を準用した$Q_{UU}$の変換を試みる。最後に，この結果を用いてただ１個の量を導入すると，これが図形の強さの指標として利用できることを示す。

## ２．主成分分析法の概説

互いに相関のある多変量のデータの持つ特徴を要約し，所要の目的に応じて総合するための手法に多変量解析法があり，その中の最も基本的なものに主成分分析法がある。

多変量$x_i$ （$i=1,2,---,m$） のデータ（情報）としての分散共分散行列$\Sigma_{xx}$（m×m）が与えられたとき（求められるとき），主成分という概念を用いて$\Sigma_{xx}$をより低い次元の量に表現し，主成分に意味を持たせてデータの特徴を分析する方法である（本文では分析の部分は不要）。

それには先ず，次のm個の合成変量（主成分）$Z_k$ ($k=1,2,---,m$) を導入する。

$$Z_k=\sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i \qquad (m個) \text{ --------- } (1)$$

ただし，ここに次の条件をつける。

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ki}{}^2=1 \qquad (m個) \text{ --------- } (2)$$

そして，式(1) の第１主成分を$Z_1$とすると，$Z_1$の分散が最大になるように$Z_1$の係数$a_{1i}$を式(2) の条件のもとに定める。しかも，$Z_1$の分散が他の主成分$Z_k$の分散の中で１番大きくなるように定めるのである（$Z_1$，$Z_k$は無相関）。

一方，$\Sigma_{xx}$の固有値を$\lambda_k$ （$k=1,2,---,m$）とし，$\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq ---- \geqq \lambda_m$とする。ここに，$\Sigma_{xx}$は実数の正方対称行列であるから$\lambda_k \geqq 0$である。

すると，$Z_1$の分散は$\lambda_1$，$Z_1$の係数は$\lambda_1$に対応する固有ベクトルでそれぞれ表わせる。

同じように，第k主成分$Z_k$の分散は$\lambda_k$，$Z_k$の係数は$\lambda_k$に対応する固有ベクトルでそれぞれ表わせる。そして，次の関係も導ける。

$$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k=\mathrm{trace}\ \Sigma_{xx} \text{ ------------------- } (3)$$

また，主成分の分散によってデータがいかによく説明されるかを表わすのに，寄与率という概念が使われる。第j主成分($j=1,2,---,m$)の分散$\lambda_j$と全主成分の分散の和$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k$との比$\lambda_j/\sum_{k=1}^{m}\lambda_k$を第j主成分の寄与率，第１主成分から第j主成分までの分散の和を$\sum_{k=1}^{j}\lambda_k$とすると$\sum_{k=1}^{j}\lambda_k/\sum_{k=1}^{m}\lambda_k$を累積寄与率と定義する。

そして，第１主成分の寄与率が十分１に近ければ，$\lambda_1$のみで全データを代表させられ，第j主成分までの累積寄与率が十分１に近ければ，$\lambda_1 \sim \lambda_j$で全データの情報が捉えられていると考えるのである。つまり，寄与率，累積寄与率が１ということは，m×m個のデータの情報を100 %網羅するといえる。

## ３．$Q_{UU}$の変換

主成分分析法の主成分の概念を用いて，$Q_{UU}$をこの要素数より少ない数の量の集合に変換することを試みよう。ただし以下，$Q_{UU}$の分散共分散行列$\Sigma_{UU}$は，単位重みの観測の分散を$\sigma_0{}^2$とすると$\sigma_0{}^2 Q_{UU}$で表わせるから，$Q_{UU}$の各要素を分散，共分散として取扱うことにする。

m個の観測量L（距離，角を含む）で構成される条件式数r（r＜m）の網を最小２乗法のもとに図形調整すれば，観測量の最確値Uの重み係数行列$Q_{UU}$（m×m）は次式で得られる[7)]。

$$Q_{UU}=Q-QA^T(AQA^T)^{-1}AQ^T \text{ ---------- } (4)$$

ここに，

Q：Lの重み係数行列（m×m）

A：条件式の係数（無次元化量）行列（r×m）

先ずQ＝E（単位行列）の場合，即ち測距と測角の重み係数が全部等しく１のときの$Q_{UU}$の変換を図ってみよう。式(4) からQ＝Eとして次式が得られる。

$$Q_{UU}=E-A^T(AA^T)^{-1}A \text{ ---------------- } (5)$$

そして，線形代数学の定理によってAに基本変形を有限回行なえば，Aを次のm次の行列に変形できる。

$A=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，ここに，$E_r$：r次の単位行列

すると，$A^T(AA^T)^{-1}A=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$であるから，$Q_{UU}$は式(5) より次のようになる。

$$Q_{UU}=E-\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{m-r} \end{bmatrix}$$

ここに，$E_{m-r}$：m－r次の単位行列

そこで，$Q_{UU}$の固有値λ：$\lambda_k$ （$k=1,2,---,m$）を求めると，λは次の固有方程式を満足させなければならない。

$$|Q_{UU}-\lambda E|=0$$

$$\therefore\ \begin{array}{c|cccc|}(r) & 0-\lambda & & & 0 \\ & & 0-\lambda & & \\ & & & 1-\lambda & \\ (m) & 0 & & & 1-\lambda\end{array}=0$$ ，であるから

$\lambda_1=1$（m－r重根），$\lambda_2=0$（r重根）を得る。従って，m－r個の第１主成分の分散１×（m－r）のみで寄与率が１であるから，変換量　m－rのみで$Q_{uu}$の全データを代表することになる。

次に，Q≠Eのとき，しかもQの対角要素のばらつきが小さいときの$Q_{uu}$の近似的な変換を考えてみよう。Qの対角要素の平均値をq（スカラー量）とすると，Q≒qEとして式(4) より，

$$Q_{uu}=qE-qEA^T(AqEA^T)^{-1}AqE^T$$
$$=q\ (E-A^T(AA^T)^{-1}A)$$

であるから，$Q_{uu}$の固有値はQ＝Eのときと同じようにして，$\lambda_1=q$（m－r重根），$\lambda_2=0$（r重根）となる。

従って，この場合もm－r個の第１主成分の分散q×（m－r）のみで寄与率が１となるから，変換量q×（m－r）のみで近似的に$Q_{uu}$の全データを代表することになる。

ただし，Q＝EのときもQ≒qEのときも，変換量として全部の固有値を考えても結果は同じである。

一般に，Q≠Eのときの$Q_{uu}$はm個の異なる固有値をとる。このとき，変換量として一体幾つの固有値の集合を採ればよいのかという問題が生じる。それには次のように考えればよい。

Q＝Eの場合に匹敵するように，$Q_{uu}$の全情報を網羅させたいならば，変換量として$Q_{uu}$のm個の全部の固有値の集合を採ればよい。

## ４．図形の強さの指標

このようにして，$Q_{uu}$のm×m個の全情報を網羅させるには，$Q_{uu}$のm個の固有値の集合を採ればよいことがわかった。

ここで，さらにこれらの固有値の集合をただ１個の値に総括するにはどうすればよいであろうか。それには，固有値の相加平均，相乗平均，幾何平均，その他が考えられる。この中で，固有値の相加平均値を$Q_{uu}$の総括値とするのは１つの自然な考え方であろう。

すると，総括値１個で$Q_{uu}$の全情報を代表させることができる。そして，都合のよいことに式(3) を考慮すると総括値は次式であらわせる。

$$\text{総括値}=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\ /m=\mathrm{trace}\ Q_{uu}/m \quad\text{-----(6)}$$

つまり，総括値は$Q_{uu}$の固有値をわざわざ算出しなくても，$Q_{uu}$の対角要素の平均値で表わせるということになる。

そこで，最後にこの総括値の利用について考えよう。ある網の$Q_{uu}$は，座標系に無関係に定まる量であり，その総括値は網固有の値となるから，これを網の図形の強さの指標（以下，指標といいN．Sと記す）とすることができる（N．S＝総括値）。

ここで，Q＝E，Q≒qEと仮定するときの指標をそれぞれN．S１，N．S２とすると，これらは，式(6) と前章３で導出した結果とを用いて次のように簡単に表わせる。

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{N.S1}=(m-r)/m \\ \mathrm{N.S2}=q\ (m-r)/m\end{array}\right\}\text{---------(7)}$$

式(7) において，測距と測角のすべての重み係数が等しくなるように配慮した網ではN．S１を，測距より測角の重み係数が若干大きいなどの網ではN．S２を，それぞれ用いればよい。

式(7) をこのように使えば，測量計画立案の段階で精度的にbestの網を設計したいとき，形状の違う網や測量方式の異なる網同士の図形の強さを，簡単な計算の結果で比較検討できるから，最良の網を選択できることになる。

また，観測量の最確値の標準偏差の平均値が目標値として与えられたとき，式(7) を用いて$\sigma_0\sqrt{(m-r)/m}$，$\sigma_0\sqrt{q(m-r)/m}$ がその目標値になるように，観測精度を上げるなり観測量を増やすなりした精度維持の対策が立てられる。

## ５．おわりに

主成分分析法の手法を準用して，複雑な相関のある$Q_{uu}$を少数の量（$Q_{uu}$の固有値）に変換できることを示した。そして，これらの量をさらに縮約した総括値を導入すると，これを網の図形の強さの指標にできることがわかった。この指標は，通常の網の場合に簡単な式で表わせるので，測量計画立案上その利便性，有用性が高いことを述べた。

図形調整法は，座標調整法（Free Network解法）に比べて種々の特長を持っている。そして，$Q_{uu}$は最小２乗法のみを根拠にした簡明直截な量であり，これを基にした指標の特長も明らかである。

図形調整法による$Q_{uu}$算出の難点は，すべての測量方式に適用できる条件式のsystematicな作成法が確立していないことであった。しかし，この１つの解決策は発表されているし[8]，個別的な測量方式によっては可能であるから[9][10]，早晩この点は解消されることであろう。

## 参　考　文　献


1) Mittermayer:A Generalization of the Least-Squares Method for the Adjustment of Free Networks, Bulletin Gèodèsique,pp.139-157,June 1972.

2) 現代測量学１，日本測量協会，pp.273-293,S.56.

3) 2),p.283.

4) 原田：ﾌﾘｰﾈｯﾄﾜｰｸ測量網平均の正規方程式Bx=rにおけるB のﾗﾝｸ の欠陥といわゆる網の自由度について，測地学会誌，第35巻第3 号,PP.287-297,1989.

5) 中根：ﾌﾘｰ 網平均における反復改良計算の問題，測地学会誌，第36巻第3 号,PP.169-175,1990.

6) 例えば，奥野・他：多変量解析法　改訂版，PP.159－258,1989.

7) 森：測量学２応用編，PP.344-353,1981.

8) 町田・森：基準点測量網の調整のための必要十分な条件方程式の規則的作成法，土木学会第45回年次学術講演会講演概要集，第４部，PP.286-287,H.2.

9) 町田・森：三辺測量網の図形調整と三辺測量鎖の誤差特性，土木学会論文集，第401 号／Ⅳ-10,PP.51-60,1989.1.

10) 森：角と距離とを測った単純な四角形鎖の誤差と効率，土木学会論文集，第359 号／Ⅳ-3 ,PP.117-126,1985.