Ⅳ-279 四辺形調整覚書

八戸工業大学 正会員 岩淵清行

１．まえがき

この覚書は方向観測法[1),2)]で角を測定した時の四辺形厳密調整（ 方向補正法と言う ）に関し、条件方程式をたてての[3)]古典的解法を、地理院方式[4)]ではなしに示したもので、コファアクター[5),6),7)]は使っていない。簡単の為にすべての観測精度は等しいとし、平面測量に限定し[8)]、推定値の誤差は述べない。また既知点の座標には誤差はないものと仮定する。

２．四辺形調整の条件方程式による方向補正法の初等的解公式

線形化された条件方程式は行列形式で書くと次のごとし。

$$[A]\ [\Delta H] = [F] \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (1)$$

［A］の要素は下のようである。記号などは図１を参照されたし。

$$
\begin{array}{c}
 \\ \phi 1 \\ \phi 2 \\ \phi 3 \\ \phi 4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
\text{一} & \text{二} & \text{三} & \text{四} & \text{五} & \text{六} & \text{七} & \text{八} & \text{九} & \text{十} & \text{十一} & \text{十二}
\end{array} \\
\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-C1 & +D1 & -C2 & -C3 & +D2 & -C4 & -C5 & +D3 & -C6 & -C7 & +D4 & -C8
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

ここに　$Ci \equiv \mathrm{COT}\,\theta i$ で　$D1 \equiv C1+C2$,　$D2 \equiv C3+C4$,　$D3 \equiv C5+C6$,　$D4 \equiv C7+C8$

我々の場合、直接観測値は $Hi(i \equiv 1,2,...,12)$である。その最確値 $Hi+\Delta Hi$ を求めるのが 当面の問題である。すなわち ［ΔH］は未知数行列で

$$[\Delta H]^T \equiv [\Delta H1, \Delta H2, \Delta H3, \Delta H4, \Delta H5, \Delta H6, \Delta H7, \Delta H8, \Delta H9, \Delta H10, \Delta H11, \Delta H12]$$

また右辺の［F］の中味は　$[F]^T \equiv [F1, F2, F3, F4]$　であり

$$F1 \equiv 2\pi - \Sigma\,\theta j,\quad F2 \equiv \theta 6+\theta 7-\theta 2-\theta 3,\quad F3 \equiv \theta 8+\theta 1-\theta 4-\theta 5,$$

$$F4 \equiv 1/Z-1 \qquad \text{ただし} Z \equiv (\Pi \mathrm{SIN}\,\theta\,\text{奇数})/(\Pi \mathrm{SIN}\,\theta\,\text{偶数})$$

であって、角の単位は数式を簡単にするためにラジアンとする。

$\theta j(j \equiv 1,2,...,8)$は次の如く直接観測値Hiから、間接的に得られる測定値である。

$$\theta 1 \equiv H2-H1,\quad \theta 2 \equiv H3-H2,\quad \theta 3 \equiv H5-H4,\quad \theta 4 \equiv H6-H5,$$

$$\theta 5 \equiv H8-H7,\quad \theta 6 \equiv H9-H8,\quad \theta 7 \equiv H11-H10,\quad \theta 8 \equiv H12-H11, \qquad \cdots\cdots\cdots \ (2)$$

Hiは整理された野帳から写しとるもので普通 H1,H4,H7,H10の四つはすべて0度00分00秒という値をもたせる。勿論これら H1,H4,H7,H10は0度00分00秒とするけれども誤差をもつことはいうまでもない。かくして$\theta j(j \equiv 1,2,...,8)$から逆に$Hi(i \equiv 1,2,...,12)$が一意にでてくる事は注意しておくべきである。さて(1)式から解を一意に求めるのには 次の式 $\Omega \equiv 1/2 \times \Sigma(\Delta Hi)^2 - \lambda 1 \phi 1 - \lambda 2 \phi 2 - \lambda 3 \phi 3 - \lambda 4 \phi 4$ を最小ならしめる如くに解く。ここに$\lambda k(k \equiv 1,2,3,4)$はラグランジュの未定係数で$\phi k$は線形化された条件方程式の左辺である。先ず始めに正規方程式［N］［λ］＝［F］から［λ］をもとめる。ここに $[N] \equiv [A]\ [A]^T$ である。［λ］は $[N]^{-1}[F]$ で計算される。そして、［ΔH］は $[A]^T[\lambda]$ からもとめられる。パソコンなどがない人のために（すなわち、手計算のために） 正規方程式を具体的に書きあらわしてみると

$$
\left\{
\begin{array}{llllll}
8\lambda 1 & & & + V1\lambda 4 & = & F1 \\
 & 8\lambda 2 & & + V2\lambda 4 & = & F2 \\
 & & 8\lambda 3 & + V3\lambda 4 & = & F3 \\
V1\lambda 1 & + V2\lambda 2 & + V3\lambda 3 & + V4\lambda 4 & = & F4
\end{array}
\right. \qquad \cdots\cdots\cdots \ (3)
$$

ここに$V1 \equiv C1-C2+C3-C4+C5-C6+C7-C8$, $V2 \equiv -D1-C2+C3+D2+D3+C6-C7-D4$

$V3 \equiv -C1-D1-D2-C4+C5+D3+D4+C8$, $V4 \equiv \Sigma Cj^2 + \Sigma Dk^2$ $(j \equiv 1,2,...,8\ ;\ k \equiv 1,2,3,4)$

従って$\lambda 4=(8F4-V1F1-V2F2-V3F3)/(8V4-V1V1-V2V2-V3V3)$, $\lambda 1=(F1-V1\lambda 4)/8$,

$\lambda 2=(F2-V2\lambda 4)/8$, $\lambda 3=(F3-V3\lambda 4)/8$

故に

$\Delta H1 = -\lambda 1 + \lambda 3 - C1\lambda 4$, $\Delta H2 = -\lambda 2 - \lambda 3 + D1\lambda 4$

$\Delta H3 = +\lambda 1 + \lambda 2 - C2\lambda 4$, $\Delta H4 = -\lambda 1 - \lambda 2 - C3\lambda 4$

$\Delta H5 = +\lambda 2 - \lambda 3 + D2\lambda 4$, $\Delta H6 = +\lambda 1 + \lambda 3 - C4\lambda 4$

$\Delta H7 = -\lambda 1 - \lambda 3 - C5\lambda 4$, $\Delta H8 = +\lambda 2 + \lambda 3 + D3\lambda 4$

$\Delta H9 = +\lambda 1 - \lambda 2 - C6\lambda 4$, $\Delta H10 = -\lambda 1 + \lambda 2 - C7\lambda 4$

$\Delta H11 = -\lambda 2 + \lambda 3 + D4\lambda 4$, $\Delta H12 = +\lambda 1 - \lambda 3 - C8\lambda 4$

かくして最確値Hi+ΔHiがもとめられる。また(2)の関係からθjの最確値が得られる。手計算の時は(3)式の右辺すべてに(3600×180/π)をかけて秒単位で計算したほうがよい。

３．数値計算例

Hiが度分秒で次の如く（秒の下一位まで）あたえられてるとせよ。図１参照。

H1 = 0, H2 = 28.15145, H3 = 57.34264, H4 = 0, H5 = 50.18262, H6 =117.57061

H7 = 0, H8 = 32.43410, H9 = 55.16539, H10= 0, H11= 57.04254, H12=129.11361

10桁電卓による手計算の答（秒）　表示は小数点下3位未満切り捨てしている。

ΔH1=+0.423, ΔH2=+0.322, ΔH3=-0.745, ΔH4= +0.133, ΔH5 =-0.272, ΔH6 =+0.139,

ΔH7=-0.600, ΔH8=+1.460, ΔH9=-0.859, ΔH10=+0.143, ΔH11=+0.791, ΔH12=-0.934

10桁計算の結果は(1)式を満足している。

４．参考文献（方向補正法に関するもののみ）

1)坪川，大森：測地学序説P.277,山海堂，昭和44年（この本によると方向の概念は1821年ガウスにはじまる。）　2)日本測量協会：測地測量１　現代測量学第４巻 P.123，日本測量協会，昭和63年（この本によると方向観測法は1820-1830年　F.W.BesseLと W.Struveにより確立された。角観測法は1870年シュライバーまでは無かった。）

3)森：測量学2応用編P.33,丸善,昭和56年（条件方程式が示されている。答なし）

4)千葉：最小二乗法p.132問題6.9,山海堂,昭和52年（覚書の数値例はこの問題と同値）

5)岩淵：東北支部発表会講演概要平成2年3月PP.344-345（コファアクター使用条件方程式法）

6)岩淵：第45回年講第4部平成2年9月PP.288-289（コファアクター使用観測方程式法誤記あり）

7)岩淵：東北支部発表会講演概要平成3年3月PP.388-389（コファアクタ無し観測方程式法）

8)Rainsford,H.F.(1979),Survey adjustments and Legast Squares,PP.131-162（この本では球過量ある時の四辺形調整をしめしている。）

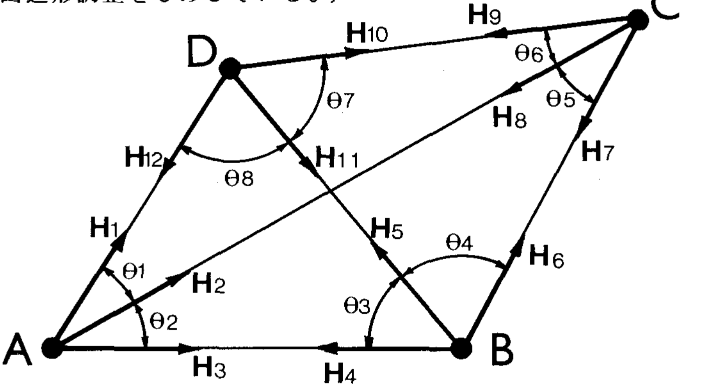

図１．Ａ点とＢ点は既知点。　Ｈｉ(i=1,2,...,12)は観測方向