IV－207　予算制約をもつ最適ネットワーク計画問題のための下界値の解法

金沢工業大学　正員　片山　直登

1　はじめに

予算(またはネットワークの総延長)の制約のなかで，OD間のフロー費用(または最短距離)の総和を最小にする問題を予算制約をもつ最適ネットワーク計画問題と呼ぶことにする．この問題に対して多くの最適解法の研究がなされているが，分枝方法に主な重点を置いており，良い下界値を求めるための解法はあまり提案されていない．一方，予算とフロー費用の和を最小にする問題の下界値に対しては，Balakrishnanらの双対上昇(Dual Ascent)法による解法[1]が知られている．本研究では，予算制約をもつ最適ネットワーク計画問題にラグランジュ緩和法と双対上昇法を適用した下界値の解法を提案する．

2　問題の定式化

予算制約をもつ最適ネットワーク計画問題NDは，以下のような最適化問題として定式化できる．

$$min \sum_{(i,j)\in L}\sum_{n\in N}\sum_{m\in \tilde{M}_O^n}(c_{ij}^m\cdot y_{ij}^m + c_{ji}^m\cdot y_{ji}^m) \tag{1}$$

s.t.

$$\sum_{j\in N} y_{jn}^m - \sum_{i\in N} y_{ni}^m = d_n^m \quad m\in M, n\in N \tag{2}$$

$$y_{ij}^m + y_{ji}^h \le x_{ij} \quad h\in M_O^{m+}, m\in \tilde{M}_O^n, n\in N, (i,j)\in L \tag{3}$$

$$\sum_{(i,j)\in L} a_{ij}\cdot x_{ij} \le B \tag{4}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad (i,j)\in L \tag{5}$$

$$y_{ij}^m\in\{0,1\},\ y_{ji}^m\in\{0,1\} \quad m\in M, (i,j)\in L \tag{6}$$

L：リンク集合，N：ノード集合，
M：ODペアの集合，B：総予算，
$\tilde{M}_O^n$：ノードnを起点とするODペアの集合，
M_O^{m+}：ODペアmと起点を同じにするペアで，$m\le h$である集合，
a_{ij}：リンク(i,j)の設置費用，
c_{ij}^m：リンク(i,j)上にiからjへODペアmのフローが流れたときに発生する費用，
d_n^m：ノードnがODペアmの起点であれば-1，終点であれば1，それ以外の場合は0となる定数，
x_{ij}：リンク(i,j)の設置の有無を表す0-1変数，
y_{ij}^m：リンク(i,j)上をODペアmのフローが流れるか否かを示す0-1変数

3　ラグランジュ緩和問題

3.1　ラグランジュ緩和問題$L1(\mathbf{v})$

問題NDの制約式である(2)式をラグランジュ緩和した問題を$L1(\mathbf{v})$とする．問題$L1(\mathbf{v})$は以下のように表される．

$$min \sum_{(i,j)\in L}\sum_{n\in N}\sum_{m\in \tilde{M}_O^n}(\bar{c}_{ij}^m\cdot y_{ij}^m + \bar{c}_{ji}^m\cdot y_{ji}^m) + \sum_{m\in M} v_{D(m)}^m \tag{7}$$

s.t.

$$y_{ij}^m + y_{ji}^h \le x_{ij} \quad h\in M_O^{m+}, m\in \tilde{M}_O^n, n\in N, (i,j)\in L \tag{8}$$

$$\sum_{(i,j)\in L} a_{ij}\cdot x_{ij} \le B \tag{9}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad (i,j)\in L \tag{10}$$

$$y_{ij}^m\in\{0,1\},\ y_{ji}^m\in\{0,1\} \quad m\in M, (i,j)\in L \tag{11}$$

v_i^m：(2)式に対するラグランジュ乗数，
$\mathbf{v}$：v_i^mのベクトル，$D(m)$：ODペアmの終点，
$\bar{c}_{ij}^m = c_{ij}^m - (v_j^m - v_i^m)$，$\bar{c}_{ji}^m = c_{ji}^m - (v_i^m - v_j^m)$

3.2　ラグランジュ緩和問題$L2(\mathbf{v},\mathbf{u},\lambda)$

問題NDの制約式である(2)式，(3)式および(4)式をラグランジュ緩和した問題を$L2(\mathbf{v},\mathbf{u},\lambda)$とする．問題$L2(\mathbf{v},\mathbf{u},\lambda)$は，リンクの設置費用を$\lambda\cdot a_{ij}$とした予算とフロー費用の和を最小にする問題の双対問題に対応している．このため，λを定数と見なせば，双対上昇法[1]によって，$\mathbf{v}$および$\mathbf{u}$の値を近似的に求めることができる．

4　問題$L1(\mathbf{v})$の最適解

問題$L1(\mathbf{v})$は問題NDの緩和問題であるので，適当な$\mathbf{v}$が与えられた場合の$L1(\mathbf{v})$の最適目的関数値は問題NDの下界値となる．

定理 1 問題$L1(\mathbf{v})$は次のようなx_{ij}からなる問題Tと等価である．

$$min \sum_{(i,j)\in L} \bar{c}_{ij}^m\cdot x_{ij} + \sum_{m\in M} v_{D(m)}^m \tag{12}$$

s.t.

$$\sum_{(i,j)\in L} a_{ij}\cdot x_{ij} \le B \tag{13}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\} \quad (i,j)\in L \tag{14}$$

$$\tilde{c}_{ij}^{m} = \sum_{n\in N}\min\{\sum_{m\in \tilde{M}_O^n}\min(0,\bar{c}_{ij}^{m}),\sum_{m\in \tilde{M}_O^n}\min(0,\bar{c}_{ji}^{m})\}$$

問題Tは0–1ナップサック問題であるので，比較的容易に解くことができる[2].

定理 2 問題Tの最適解をx_{ij}^*としたとき，y_{ij}^mの最適解y_{ij}^{*m}は以下のようになる．

$$y_{ij}^{*m} = \begin{cases} 1 & x_{ij}^*=1, \bar{c}_{ij}^m<0 \; and \; p_{ij}^{nm}\le p_{ji}^{nm} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{15}$$

$$y_{ji}^{*m} = \begin{cases} 1 & x_{ij}^*=1, \bar{c}_{ji}^m<0 \; and \; p_{ij}^{nm}> p_{ji}^{nm} \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{16}$$

$p_{ij}^{nm} = \sum_{m\in\tilde{M}_O^n}\min(0,\bar{c}_{ij}^m)$,
$p_{ji}^{nm} = \sum_{m\in\tilde{M}_O^n}\min(0,\bar{c}_{ji}^m)$

定理 3 問題Tは，問題$L2(\mathbf{v},\mathbf{u},\lambda)$よりも等しいか良い問題$ND$の下界値を与える．また，問題$L2(\mathbf{v},\mathbf{u},\lambda)$の解が与えられた場合，この$\mathbf{v}$を用いて，問題$L2(\mathbf{v},\mathbf{u},\lambda)$よりも，つねに等しいか良い問題$ND$の下界値を求めることができる．

5 解法

5.1 vの設定

$L1(\mathbf{v})$のラグランジュ乗数$\mathbf{v}$の適切な値を設定する方法として，劣勾配法[3]が知られているが，この問題に関しては，問題の規模が大きくなると収束が非常に遅くなる．一方，λの値を決めれば，双対上昇法によって$L2(\mathbf{v},\mathbf{u},\lambda)$のラグランジュ乗数$\mathbf{v},\mathbf{u}$の値を求めることができる．このため，双対上昇法によって得られた$\mathbf{v}$を$L1(\mathbf{v})$のラグランジュ乗数$\mathbf{v}$とする．

5.2 λの設定

問題$L2(\mathbf{v},\mathbf{u},\lambda)$の$\lambda$に対する劣勾配は，

$$\sum_{(i,j)\in L} a_{ij}\cdot x_{ij}^* - B$$

である．劣勾配が正であればλを大きくする必要があり，負であればλを小さく必要がある．ここでは，

$$\lambda := \frac{\lambda}{B}\sum_{(i,j)\in L} a_{ij}\cdot x_{ij}^* \tag{17}$$

のようにλを変更することにする．また，λの初期値を1とする．

5.3 解法の流れ

下界値を求めるための解法の流れを示す.

[1] $\lambda := 1$

[2] 近似解法[4]によって，上界値を求める．

[3] 双対上昇法によって，$\mathbf{v}$を求める．

[4] 問題Tを解き，$\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*$および下界値を求める．

[5] 解が収束していれば終了．

[6] 釘付けテストを行なう

[7] $\lambda := \frac{\lambda}{B}\sum_{(i,j)\in L} a_{ij}\cdot x_{ij}^*$とし，[2]へ．

[6]の釘付けテストは，問題Tがナップサック問題となることから，ナップサック問題のための釘付けテスト[2]が適用できる．このことによって，問題の規模を逐次，縮小できる．

6 おわりに

予算制約をもつ最適ネットワーク計画問題に対して，フロー保存制約をラグランジュ緩和した問題がナップサック問題となることを示した．また，双対上昇法によって求められたラグランジュ乗数を用いた下界値を求める解法を提案した．

参考文献

[1] Balakrishnan, A. and Magnanti, T.L. and Wong, R.T. : " A Dual–Ascent Procedure for Large–Scale Uncapacitated Network Design," *Opns. Res.*, pp.716–740, Vol., 37, No.5 , (1989).

[2] 今野浩，鈴木久敏：「整数計画法と組合せ最適化」，日科技連，(1982)．

[3] Fisher, M.L. : " The Lagrangian Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems," *Mang. Sci.*, pp.1–18, Vol., 27, No.1 , (1981).

[4] 森津秀夫：「最適交通網構成手法に関する基礎的研究」，神戸大学，(1984)．