土木学会第46回年次学術講演会（平成３年９月）

# Ⅳ-68　ニューラルネットワークによるＰＥＲＴ計算

東北大学　大学院　学生員○日高　誠
東北大学　工学部　正会員　湯沢　昭
東北大学　工学部　正会員　須田　熈

## １．まえがき

ＰＥＲＴの線形計画法（ＬＰ）による解析[1]は、工期と費用の関係を分析するパラメトリック・プログラミングに発展できる等の長所をもつ反面、現在の直列処理による演算では時間がかかり効率的ではない。しかし、こうした解析が並列処理で演算できれば、時間を短縮できる。そこで並列計算原理として近年脚光を浴びているニューラルネットワーク[2]を簡単なＰＥＲＴ計算に適用し、その実用性を検討した。

## ２．Hopfieldモデル

ニューラルネットワークは階層型と相互結合型の二種類に大別できるが、このうち最適化問題に適用可能なのは相互結合型である。Hopfieldによれば、相互結合型のニューラルネットワークについてユニットi'からユニットiへの結合の重みを$W_{ii'}$とし、以下に示すような規則によって状態更新を行った場合、

ユニットｉの状態：$u_i=\sum_{i'} W_{ii'} X_{i'} + h_i$

ユニットｉの出力：

$$X_i = (1/2) \times (1 + \tanh(u_i/\alpha))$$

ただし、$h_i$：ユニットｉのしきい値

$\alpha$：ユニットの感度パラメーター

ネットワークのエネルギー：

$$E = -(1/2) \times \sum_i \sum_{i'} W_{ii'} X_i X_{i'} - \sum_i h_i X_i$$

が極小値（最小値ではない）となることを示している。

## ３．解析法の概要

作業中断を認めない場合の最早結合点時刻（ＥＳ値）を求めるＰＥＲＴ計算をＬＰ問題として定式化すると、以下のようになる。

目的関数：$Z = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \rightarrow \min$

制約条件：$x_j - x_i \geqq D_{ij}$

$x_i \geqq 0 \quad (i=1 \sim m)$

ここに、$x_i$：ノードｉのＥＳ値

$D_{ij}$：作業（i,j）の所要日数

そこでシンプレックス法と同様、各制約条件式をスラック変数$s_p$により等式化する。

$$x_j - x_i - s_p = D_{ij}$$

ここで、$s_p$は制約条件式の性質からフリーフロート（ＦＦ値）に等しく、目的関数が最小となるときにＦＦ値の合計は最小となる。各ＥＳ値とスラック変数を合わせてベクトルｘとし、

$$x = (x_1, x_2, \ldots x_m, s_1, s_2, \ldots s_n)$$

ベクトルｘの制約条件による係数行列をＡ、各制約条件に対応する作業の所要日数をベクトルＢとすれば、

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} a_{1,2} \ldots a_{1,m+n} \\ . \quad \cdots \quad . \\ . \quad \cdots \quad . \\ . \quad \cdots \quad . \\ a_{n,1} a_{n,2} \ldots a_{n,m+n} \end{bmatrix}$$

$$B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

制約条件をすべて満足しているということは、ベクトルのノルムの二乗が０、すなわち$|Ax-B|^2=0$と同じである。

更に$x_i$をニューラルネットワーク上で表現するために、

$$x_i = \sum_k X_{ik}, \qquad s_i = \sum_k X_{i+m,k}$$

とおく。以上よりネットワークのエネルギーを、

$$E = (\text{目的関数}) + (\text{制約条件})$$

$$= \sum_i \sum_k X_{ik} + |Ax - B|^2$$

$$= -(1/2) \times \sum_{ik} \sum_{i'k'} (-\sum_j a_{ji} a_{ji'}) X_{ik} X_{i'k'}$$

$$+ \sum_i \sum_k (2 \sum_j b_j a_{ji} - 1) X_{ik}$$

とし、Hopfieldのエネルギー式と比較して結合の重み$W_{ij}$としきい値$h_i$を

$$W_{ii'} = -\sum_j a_{ji} a_{ji'}$$

$$h_i = 2\sum_j b_j a_{ij} - 1$$

と定めて、ネットワークの状態更新を行えばよい。

また、最遅結合点時刻（ＬＦ値）を求めるＰＥＲＴ計算をＬＰ問題として定式化すると、以下のようになる。

目的関数：$Z = y_1 + y_2 + \cdot\cdot\cdot + y_m \rightarrow \max$

制約条件：$y_j - y_i \geqq D_{ij}$

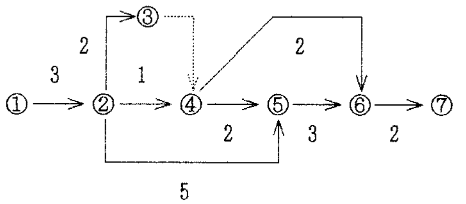
$y_i \geqq 0 \quad (i=1 \sim m)$

ここに、$y_i$：ノードｉのＬＦ値

すなわち、ＥＳ値を求める時に最小化した目的関数を最大化すればよい。ここで注意することは、ＬＦ値が最大のとき、ＦＦ値の合計が最小となることと、$x_m = y_m$となることである。

## ４．ケーススタディー

図１に示すような９作業から成る仮想工程ネットワークに対しニューラルネットワークによる解析を行い、ＥＳ値を求めてみる。




図－１　工程ネットワークの例[1)]

このネットワークのＥＳ値の厳密解は、それぞれ$x_1=0, x_2=3, x_3=5, x_4=5, x_5=8, x_6=11, x_7=13$である。

まず制約条件を構成する各要素は、

$X = (x1, x2, ..., x7, s1, s2, ..., s9)$

$$A = \left(\begin{array}{l}
-1,1,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0,0 \\
0,-1,1,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,0,0 \\
0,-1,0,1,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0,0 \\
0,-1,0,0,1,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0,0 \\
0,0,-1,1,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,0,0,0 \\
0,0,0,-1,1,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,0,0 \\
0,0,0,-1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,0 \\
0,0,0,0,-1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0 \\
0,0,0,0,0,-1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,-1
\end{array}\right)$$

$B = (3,2,1,5,0,2,2,3,2)$

となる。求める変数はひとつにつき15個のニューロンで表現し$x_i = 15$まで表せるようにする。これから各ニューロンの結合の重みとしきい値を求め、状態変化規則を用いてニューロンの状態をひとつずつすべて変化させる（１サイクル）。このサイクルを繰り返せば、ネットワークはエネルギーが極小となるようなある状態に落ち着く。今回はニューロンの初期値$x_{ik} = 0.0$，ユニットの感度パラメーター$\alpha = 0.1$として、さらに最小値への収束性を高めるために$\alpha$の値を

$$\alpha(n) = \alpha(n-1)/\log(1+n)$$

とし、サイクル毎に徐々に減少させながら状態変化させた。また、制約条件を完全に満たしているとき、ＦＦ値すなわちスラック変数の合計も最小となることから実際には目的関数にスラック変数も取り込んで計算した。結果として８サイクル目で厳密解と等しい解を得た。

また、この他にも作業数が１０程度の同様な仮想工程ネットワークに対しこの解析法を適用したが、いずれも１０サイクル以内に最適解に収束した。

## ５．おわりに

本研究では簡単なＰＥＲＴ計算にニューラルネットワークを用いて、最適解を求めることができた。現状ではニューラルネットワークをソフトウェア上でシミュレートしているので、シンプレックス法等との時間的な比較はできないが、将来ハード面でニューラルネットワークによる並列処理が実現された場合、ソフト上での１サイクルは、計算機の単位演算時間となるので、非常に高速に結果が得られるものと考えられる。また、ニューラルネットワークは最適解を保障するものではないが、実質上最適解を求めることが困難なパラメトリックプログラミングに拡張できれば、有効な解析手段になると考えられる。

### 参考文献

1)山本幸司：拡張型 Precedence Networkモデルの線形計画法による解析、土木学会論文集、第４１３号、pp.117～124、1990

2)平野広美：Ｃでつくるニューラルネットワーク、パーソナルメディア