土木学会第46回年次学術講演会（平成３年９月）

III-464　上流法を用いた物質移行解析の適用性に関する検討

間組　正　小林　晃

1. はじめに

近年、地下水の汚染が多くの注目を集めている。このような状況において、地下水中の物質移行シミュレーション技術は、汚染発生源の追跡、汚染拡大の予測、対策工の効果の評価などに用いられる。

一般に、地下水中の物質移行を表す質量保存則は、移流分散方程式と呼ばれる。この方程式は、分散係数に対して流速が速い場合には、解が振動することが知られている。この早い流速場において安定した解を得る手法の内、最も多くの実績があるのは、上流法（風上法）を用いた差分法あるいは有限要素法であろう。特に、有限要素法では形状関数を少し変えることで導入することができ、広く用いられている。しかし、この手法が実際問題に対して、どの程度適用性があるのかといった議論は少ない様に思われる。これは、安定性の指標であるペクレ数の実際現象の定義が、数値解析のそれと必ずしも対応していないためと思われる。本報告では、実際現象のペクレ数に対して、巨視的な分散係数に着目した定義を用いて、上流法を用いた有限要素法が実際の物質移行問題に有効であることを示すものである。

2. 上流法

上流法は、移流分散方程式をガラーキン法を用いて有限要素に離散化する時、重み関数に非対照な関数を用いる。この非対照な重み関数により、通常の移流分散方程式に疑似分散項が付加される形になり、見かけのペクレ数$P_e(=v\Delta x/D$: vは流速、Dは分散係数、Δxは要素の長さ)が減少して、解が安定になる。

移流分散方程式はこの上流法を用いて安定に解くことができるが、流速が速い場合には、数値計算結果と真の解の間に誤差が生じる。例えば、図-1はP_e=10、C_u=1の条件下での一次元問題の解析解と上流法を用いた有限要素法の結果の比較であるが、上流法の重み係数αが0.5から1の間において解が安定しているにもかかわらず、解析解と数値解の間には誤差が生じていることがわかる。このような誤差の大小は、ペクレ数とクーラン数$C_u(=v\Delta t/\Delta x)$に関係している。

3. 実際現象のペクレ数

ここで、論じるペクレ数は、その特性長をメッシュ間隔に取った局所的な値である。有限要素法のように、領域を離散化して微分方程式を解く手法では、その個々の要素の大きさは、その場の特性によって定められる。すなわち、その領域内で方程式中のパラメータ値が一定であると仮定できる大きさに規定される。一般には、このような大きさの最小の体積をREVと呼んでいる。換言すれば、有限要素法による解析ではREVが存在することを仮定している。このように、離散化する一つの要素の大きさは、本来はその場の特性より定められるものであると思われる。従って、実際現象のペクレ数を論じるばあいには、このような積分領域の大きさとその中の巨視的な流速と分散係数から求めることが必要であると思われる。しかし、一般には、実際現象のペクレ数を論じるときには、平均実流速uと分子拡散係数D_d及び平均の間隙径あるいは粒径dが用いられる。その場合、例えば、u=0.09m/hr、d=2mm、$D_d=10^{-9}\mathrm{m^2/sec}$と仮定すると、ペクレ数は50になる。このようなペクレ数は、微視的な分散支配か移流支配かの指標であり、解析で議論されるペクレ数と同じと考えるのは適当ではない。積分領域の大きさについては、巨視的な分散係数の規模効果に関する研究では、透水係数の相関長さを積分領域とすることが多い[1)]。その場合の分散係

数は巨視的な値である。そのような研究の一例に、カナダのBordenサイト（砂質土層）で行なわれたトレーサ試験の検討結果[2)]がある。それによると、平均流速が0.091m/hr、積分領域の代表長さが2.8m、分散係数が$30.6m^2/d$であり、ペクレ数は7.8と見積られている。透水係数の相関長さが求められた例は非常に少ないが、このように、巨視的なペクレ数は実際では、おおよそ10程度になるものと予想される。このような領域の解析では、積分領域を数個に分割することにより、解析のペクレ数を一桁程度に落とすことができる。従って、一桁程度のペクレ数を有する問題を十分な精度で解ければ、その手法が実際問題に有効に適用できることになる。

4．数値分散を削除した上流法

図-2は、図-1の解析で用いた要素間隔を半分に設定することにより、ペクレ数を5にした場合の上流法を用いた結果である。この場合、クーラン数を小さくすると解析解に近づくが、それもC_u=0.2以下ではほとんど改善が見られない。この真の解との差は、解析の数値分散が一つの要因であると思われる。そこで、上流有限要素法に差分法でよく行なわれる数値分散を消去する手法を導入する。その手法は、分散係数から数値分散による見かけの分散係数である$v\Delta x/2$を差し引くものである。そのような手法による結果を図-3（数値分散修正α=0.61）に示す。同図によると解は上流側で振動を生じている。これは数値分散分を分散係数から差し引いたために、ペクレ数が大きくなったために生じたものと思われる。そこで上流法の係数αを1に大きくした結果を示す。その結果は解析解に非常に良く一致していることが分かる。このように、上流法に数値分散を削除するような手法を用いることにより、ペクレ数が一桁程度の問題であれば、十分な精度で解けることが分かる。

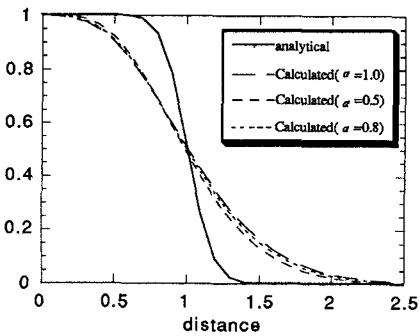

図-1　P_e=10の場合の上流法による解析結果

5．おわりに

以上の検討の結果、上流法を用いた物質移行解析はペクレ数が一桁程度の問題であれば、十分な精度で解を求めることができることが分かった。また、物質移行の問題ではその実際のペクレ数が10程度であることもわかった。従って、上流法を用いた有限要素法は実際の問題に対して有効であると言える。

参考文献

1) Neuman,S.P. and Y.K.Zhang,Water Resour. Res. Vol.26,No5.
2) Zhang,Y.K. and S.P.Neuman,Water Resour. Res. Vol.26,No5.

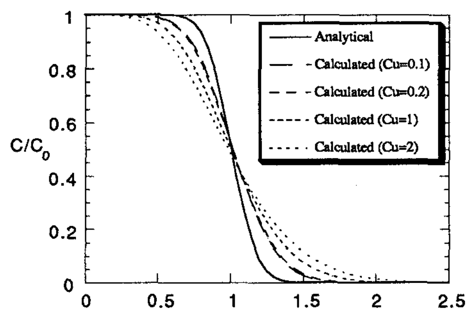

図-2　P_e=5の場合の上流法による解析結果

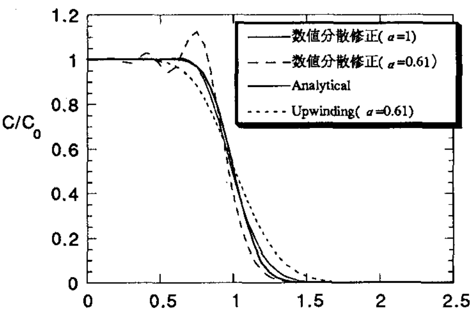

図-3　数値分散を削除した解析結果