土木学会第46回年次学術講演会（平成３年９月）

III-419

無限要素の地下水解析への応用

アジア工科大学　正員　本城勇介
アジア工科大学　　　Gyaneswor Pokhrel

１．まえがき

特に地盤工学に関連した地下水の解析では、解析対象範囲（たとえば掘削工事現場周辺）の大きさに比べ、影響範囲の大きさはかなり大きい。このため、従来行われていた解析では、解析対象範囲を中心として、かなり広い範囲を有限要素離散化し、この周辺に一定水頭境界を設け、解析を実行するのが一般的である。しかし、このような問題では、解析対象範囲については土層構成等の比較的詳細な情報が存在するものの、そこから離れた範囲でのこの種の情報はほとんど存在せず、この範囲をモデルに取り入れるのは、もっぱら境界条件の影響を評価するためである場合が多い。

ここに導入する「無限要素」は、上記のような問題を解決するために、解析対象範囲は従来の通り有限要素離散化し、この回りの境界に無限遠に存在する一定水頭境界を評価できる「無限要素」を配置し、解析範囲を小さくすることにより、計算の効率化を図ろうとするものである。以下の説明の便宜のために、有限要素離散化する解析対象範囲を近接場（Near Field）、無限要素によりモデル化する範囲を遠隔場（Far Field）と呼ぶ事にする。

２．無限要素の定式化

無限要素は、Bettess & Zienkiewicz(1975)が、海洋波浪の遠隔場のモデリングに使用したのが最初であると考えられる。代表的な無限要素に関する研究を、遠隔場に於ける変位あるいはポテンシャル（水頭）等の減衰関数の選択と、要素積分の方法に注目して分類すると以下の３つになると考えらる。

（１）指数減衰を用い、要素積分を一般座標系で行った、Bettess(1977)の研究。

（２）逆比例減衰を用い、要素積分を解析的に行ったLynn & Hadid(1981)の研究。

（３）逆比例減衰を用い、要素積分を局所座標系への変換と数値積分法により行ったRajapaksa & Karasudhi(1985)の研究がある。

この中でも特にRajapaksa et.al.(1985)の研究は、静半無限弾性体を対象に、解析解から適当な減衰関数を選択する方法、無限要素の分類、一般座標系から局所座標系への変換方法と数値積分法などを、極めて体系的に示しており画期的なものであると考えられる。本研究も彼らが、半無限弾性体の応力解析を対象に展開した方法の内「一方向収縮による有限要素（ＦＥＳＣ）」(Finite Element by Singular Contraction)を、無限遠水頭一定境界の問題に適用したものである。なお、より詳細な文献要約は、Pokharel(1991)を参照されたい。

本研究では、一次元流無限要素と放射流無限要素の開発を行った。ＦＥＳＣでは、適当な座標変換関数により一般化座標形の無限要素を、局所座標系の正方形要素に座標変換する。このとき水頭の減衰をうまく表現できる座標変換関数を選択する事が極めて重要であり、このために単純化された問題の解析解を研究する事が要請される。それぞれの問題に対する解析解と、これを陽な形で精度よく近似した場合の解を表１に示した。表より分かるように、水頭の減衰は時間の経過と供に１／r^8までの項を含む解から、１／r^2までを含む穏やかな減衰へと変化してゆく。そこで本研究では、試みに以下に示すような級数の座標変換関数を用いた。

$$N_i^c = \frac{(1-\eta)}{2} * \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} * \left(\frac{1}{m(1-\xi)}\right)^m \quad (i=1,2)$$

$$N_3^c = 0.0 \qquad N_4^c = 0.0$$

この座標変換では、近接場と遠隔場の境界節点の座標が変換を大きく支配している事が解る。

一方、水頭内挿関数としては、一般的な形状関数を用いる。従ってこの無限要素は、ｱｲｿﾊﾟﾗﾒﾄﾘｯｸ要素ではなく(ｽｰﾊﾟｰ)ﾊﾟﾗﾒﾄﾘｯｸ要素である。

剛性マトリックスの計算法は従来の有限要素法と全く同様であり、本計算ではガウスールジャンドル数値積分法を用いた。

３．解析解との比較

無限要素の有効性を検討するために、放射流要素を用いてTheisの解との比較を行った。図１は、このために用いたメッシュ分割図であり、この扇形の中心に揚水井を配置し、それぞれ井戸より800,3000m､のところに無限要素あるいは水頭一定境界を設定した場合の解と､9500mのところに水頭一定境界を設定した場合、そして解析解(Theisの解)の比較を行った。

比較の結果は、図２に観測位置を固定した場合（井戸より200m）の水頭降下の時間変化を、図３に時間を固定した場合（揚水開始より100時間後）の水頭降下の空間的な変化を示した。いずれも無限要素が相当程度の効果を持っている事を示している。なおこの時、式（３）に示した級数の座標変換関数は検討の結果第５項目までを考慮した。

このほか一次元流要素の解析解との比較、実際の揚水試験結果を用いた検討等も行ったが、紙面の制約上省略し、発表時に譲る。

4．むすび

無限要素の利点は以下のような点にあると考えられる。

(1)無限要素により遠隔場の近接場に与える影響を効果的に解析に取り入れる事ができる。

(2)無限要素は、要素間の材料的な性質が異なるような場合でも適合条件を満たしている。

(3)通常の有限要素法ﾌﾟﾛｸﾞﾗﾑに、簡単につけ加える事が出来る。

一方無限要素にはまだ解決されていない点が幾つか存在する。

(1)井戸が多数存在するような場合の減衰関数原点の設定位置。

(2)近接場の大きさ、経過時間などを考慮した最適減衰関数の選択。

(3)同様に、近接場の大きさと計算精度の関係。

（主要参考文献）

Rajapaksa & Karasudhi (1985) J.Eng.Mech.(ASCE)Vol.111(9),pp1144-1158

Pokhrel, G. (1991) AIT Masteral Thesis, GTE

表－１　解析解と遠隔場の水頭減衰形状

Type of Flow	Governing Equation	Analytical Solution	Approximation	Short Term Interms of 1/Tv or $\beta=\frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}=\sqrt{u}$	Short Term Interms of $r(=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ (i.e. constant t)	Long Term Interms of 1/Tv or $\beta=\frac{r}{2\sqrt{\kappa t}}$	Long Term Interms of $r(=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ (i.e. constant t)
Axi-sym. 2-D Flow	$\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}=\frac{S}{T}\frac{\partial\phi}{\partial t}$	Theis Solution $s=\frac{Q}{4\pi T}[-0.57-\ln u+u-\frac{u^2}{2\cdot 2!}+\ldots]$	$s=\frac{Q}{4\pi T}\sqrt{2\pi}*\frac{1}{u}*\left(\frac{1}{2.5+3.0u-0.1u^2+1.4u^3}\right)$	$u^{-4}+O(u^{-5})$	$r^{-8}+O(r^{-9})$	$u^{-1}+O(u^{-2})$	$r^{-2}+O(r^{-3})$

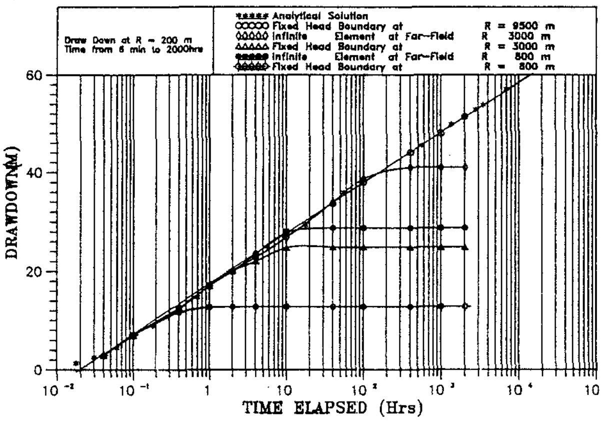

図２　各解の比較（R＝２００m）

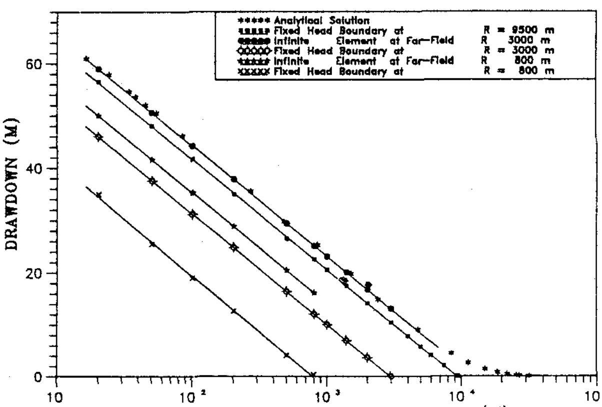

図３　各解の比較（揚水開始より100時間後）

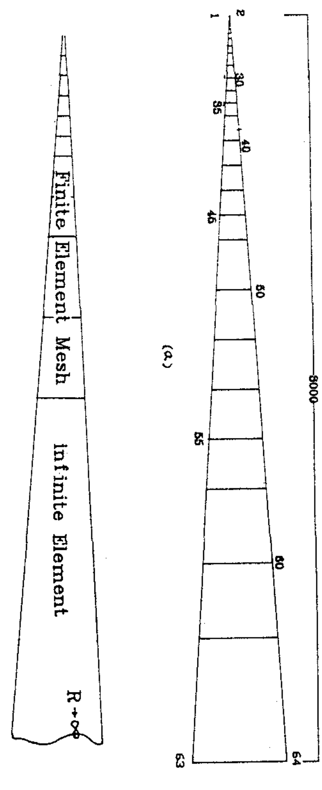

図１　有限要素離散化と無限要素