

III-223 粒状体シミュレーションの接触剛性に関する考察

山梨大学工学部 正会員 土倉 泰
 東北学院大学工学部 正会員 佐武 正雄
 東北大学工学部 正会員 岸野 佑次

1. まえがき: 粒状体のシミュレーション解析を行うに際し, 接触剛性の値をいかに定めるかは基本的な問題である. 本文はこれについて若干の考察をしたものである.

2. 接触剛性の理論とシミュレーションへの適用: 接触法線方向の剛性については Hertzの接触理論¹⁾²⁾を適用することができる. ここでは半径の等しい2つの球の接触を考える. 2球の半径が異なる場合には, それぞれの半径から算定される換算半径を用いて同様の議論ができる¹⁾. 接平面内方向の接触力はないものとする. この理論では接触は半径aなる円形の平面においてなされるものとされる. aは次式で与えられる.

$$a = (K p_n r)^{1/3} \dots\dots\dots (1)$$

ここに p_n は接触力の法線方向成分, r は接触粒子の半径である. K は粒子自身の弾性係数 E , ボアソン比 ν を用いて次式で与えられる.

$$K = \frac{3(1-\nu^2)}{4E} \dots\dots\dots (2)$$

一方, 粒子間の重なり δ は次式で与えられる.

$$\delta = 2 \left(\frac{K p_n}{r^{1/2}} \right)^{2/3} \dots\dots\dots (3)$$

したがって, 接触点の法線方向のコンプライアンス c_n は次のようになり, 法線方向の接触剛性 k_n はその逆数として与えられる.

$$c_n = \frac{d\delta}{dp_n} = \frac{1}{3} \left(\frac{K^2}{r p_n} \right)^{1/3} = \frac{1-\nu}{2Ga} = \frac{1}{k_n} \quad (4)$$

ここに G は粒子を形成する材料のせん断弾性係数である.

接触点における接平面内方向の接触剛性 k_t については, Mindlin らの研究結果²⁾を利用できる. いま法線方向接触力が一定で接平面内方向の接触力が增加する場合を考えると, k_t は次のように導かれる.

$$k_t = \frac{4Ga}{2-\nu} \left(1 - \frac{p_t}{p_n \tan \phi_\mu} \right)^{1/3} \dots\dots\dots (5)$$

ここに $\tan \phi_\mu$ は粒子間の摩擦係数である. 上式より p_t が $p_n \tan \phi_\mu$ に近づくにつれ, k_t は零に漸近することがわかる. (5)式は除荷や再載荷を考える場合には括弧内の第二項が変化する²⁾. これをシミュレーションに取り入れることもできるが, 計算は複雑となる. ところで, 従来のシミュレーション解析では(4), (5)式で与えられるような接触剛性ではなく, 単なる線形剛性が用いられることが多い³⁾. ところが, その値の設定方法については必ずしも明確とはなっていない. また線形剛性を用いる場合に解析結果に及ぶ影響については詳しく調べられておらず, 何らかの評価をする必要があると考えられる.

3. 簡単なモデルを用いた Mindlin解と線形剛性ととの比較: 図-2に示すような面心立方構造に対応する規

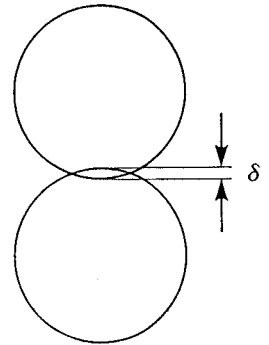


図-1 粒子の重なり δ

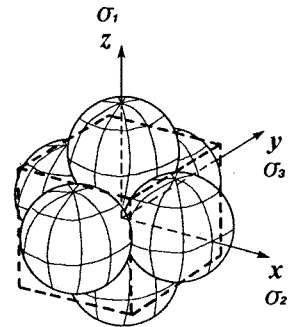


図-2 解析モデル

則配列モデルの単調せん断を、接触剛性にMindlin解を用いる場合と線形剛性を用いる場合とで行い、解析結果の差を調べることとする。粒子の直径は 2×10^{-2} cm, 粒子間摩擦角 μ は 25° とする。初期状態は等方圧縮状態とし、平均応力 p は 5 kgf/cm^2 ($4.9 \times 10^5 \text{ Pa}$)で解析中一定とする。このときモデル内の p_n の平均値は一定である。また初期の等方圧状態ではすべての p_n は等しくなっていることに注意する。いま粒子には健全な岩質材料を想定し、 $E = 5 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ ($4.9 \times 10^{10} \text{ Pa}$), $\nu = 0.2$ とする。図-2の波線で示す単位領域の体積 V は次式で与えられる。

$$V = \{2^{1/2} \times (2r - \delta)\}^3 \dots (6)$$

また初期状態での平均応力 p は仮想仕事の原理から導かれる粒状体の応力⁴⁾を用いて次のように与えられる。

$$p = \frac{4 p_n}{V} (2r - \delta) \dots (7)$$

剛性 k_n に線形性を仮定すると次式が成立する。

$$\delta = p_n / k_n \dots (8)$$

線形剛性を用いるものとするれば、(1), (2), (4), (6)~(8)式より、 $p_n = 1.413 \times$

10^{-3} kgf ($1.386 \times 10^{-2} \text{ N}$), $k_n = 1.422 \times 10^2 \text{ kgf/cm}$ ($1.395 \times 10^5 \text{ N/m}$)となる。図-3は中間主応力の最大、最小主応力に対する相対的大きさを表すRodeのパラメーター μ_σ を -0.5 とした解析結果である。点線がMindlin解を用いた結果である。 k_t の大きさは解析に影響しないとする研究結果⁵⁾もあるが、本解析では線形剛性を用いた場合に $k_t/k_n = 0.7$ とするとMindlin解に近い結果が得られた。なお、得られた粒状体の弾性係数は 10^3 のオーダーとなっており、現実の密な砂の値に近いものとなっている。

4. 線形剛性の値の設定: 不規則な構造をもつ一般の粒状体では平均的な p_n を求めることは困難であるが、上述の簡単なモデルを適用することによって解析条件として与えられる r , p の値に見合った線形接触剛性を定めることができる。ただし、このモデルは最密構造であり配位数が最大となるので一般には剛性は求めた値よりやや大きめとする必要があろう。なお、従来行われているように⁵⁾, (5)式の括弧内の第2項を無視し p_n に依存した線形剛性を採用することができる。実際にはこうして定めた接触剛性を用いる方が個々の p_n の値を反映するので材料定数との対応を考え易い。先に示した例題においてこの考え方で $k_t/k_n = 0.7$ とした解析を行えば、ほぼMindlin解と一致した変形量が得られることを確認している。

5. あとがき: 簡単なモデルを用いてMindlin解と線形剛性を用いた解析を比較し、平均応力一定の条件下では k_t/k_n を適当に定めて計算すれば両者はほぼ等しい変形量を与えることを示した。また、本文でまとめた理論を適用して接触剛性を考えた場合に現実的な粒状体の弾性係数が得られることを示した。さらに従来必ずしも明確でなかった線形剛性の値の設定方法に関する1つの考え方を示した。最後にMindlin解を簡略化したものを用いれば p_n の変化するような場合の接触剛性を考え易いことに言及した。シミュレーションにおいて、接触剛性には理論解を用いることが最も望ましいが、実際の変形では滑りや構造変化の影響が支配的であり、複雑な理論解を考えずとも線形剛性を用いて挙動を十分に再現できるものと考えられる。

参考文献

1) S. Timoshenko and J.N. Goodier: Theory of Elasticity, McGraw-Hill Book Company.
 2) R. D. Mindlin and H. Deresiewics: J. appl. Mech. Vol. 20, pp. 327-344, 1953.
 3) R. Dobry and T.-T. Ng: Proc. 1st U.S. Conf. on Discrete Element Methods, Golden Colorado, 1989.
 4) Kishino, Y.: US-Japan Seminar, Gakujutsu Bunken Fukyu-kai, pp. 114-122, 1978.
 5) Cundall, P.A.: US-Japan Seminar, Elsevier, pp. 113-123, 1988.

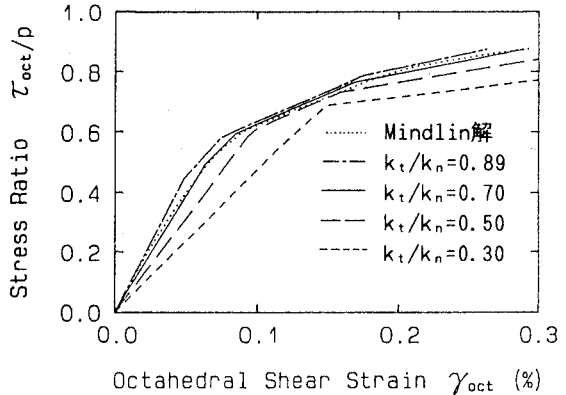


図-3 解析結果