

III-214 砂のような粒状体の安定性の条件と非関連流動則

八戸工業大学(正) 飛田 善雄

1. はじめに 砂、土、コンクリート等のように、拘束圧依存性、ダイレイタンス挙動を示す材料の定式化に、塑性ポテンシャルGと降伏(負荷)関数Fが異なるとする非関連流動則に基づく定式化がしばしば用いられる。非関連流動則は既に多くの研究者に指摘されている様に、DruckerあるいはIl'ushinの安定性の条件を満足する定式化ではないので、数値解析(特に、動的問題)に適用した場合、思いがけない結果を得る危険性がある。本文では、重要な問題であるにも係わらず、必ずしも十分な認識がもたれているとはいえない安定性の条件と非関連流動則に関連する問題を議論する。

2. 安定性の条件(北川(1987)による)

安定性の条件は「平衡状態にある系に、任意の攪乱を加えた後に生じる運動において、攪乱が小さければ生じる変位の振幅が常に小さいとき、その平衡状態は安定である。」という定義を出発点としている。この定義はさらに「攪乱を与えたとき、物体内部のエネルギーの変化が、外力がなす仕事よりも大きければ(運動エネルギーが時間と共に増大することはできないので)物体は安定である」と解釈することができる。

微小ひずみの仮定においては、弾塑性体の場合には、よく知られた次の数式となる。

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V (\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p) dV > 0 \quad [\dot{\epsilon}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}] \quad (1)$$

この条件は、熱力学の第2法則のような確固たる法則から導かれるものではないが、これに代わるべき明確な条件が呈示されない限り、十分に力学的基礎を有するものであると考える必要がある。(1)の条件は安定性に関しては十分条件(1)式が満たされない安定な状態が有り得る)である。さらに通常、弾性成分は弾性ポテンシャルから導かれ、 $\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e = \dot{\sigma}_{ij} C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} > 0$ (全ての $\dot{\sigma}$ に対して成立する)と $C$ については正定値性を保証するように定式化されるので、(1)より強い条件として、次の式が得られる。

$$d^2 W^p = \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p dV > 0 \quad (2)$$

考えている問題が均一な変形を許すようなものであれば、あるいは物体のあらゆる点で満足されると仮定すれば、次の局所形が得られる。

$$d^2 w^p = \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p > 0 \quad (3)$$

3. Ladeらの一連の議論の重要性と問題

Ladeらの一連の実験は、材料科学という観点から安定性の議論に大きな話題を提供している。彼らは三軸圧縮試験機を用いて、塑性ひずみ増分が、非関連流動則により精度よく表現され、排水条件の場合、 $d^2 w^p < 0$ を示す経路において、砂供試体は全く不安定な兆候が見られなかったとし、Druckerの安定性の条件が不十分なものであるとしている。排水条件・非排水条件の両者の変形を考慮して、ダイレイタンス特性を不安定条件に取り入れることを提唱している。この議論については、多くの問題が呈示できよう。

①排水条件と非排水条件を同等に取り扱っているが、特に、非排水条件の基で不安定な挙動を示す飽和ゆる詰め砂の場合には、土粒子骨格が不安定現象を示す前に、(土+水)の二相系全体が不安定挙動を示す(Vardoulakis)。つまり、飽和ゆる詰め砂の不安定挙動には、有効応力の概念は適用できないので、排水・非排水の不安定挙動を同等に議論することはできない。尚、同等に議論するためには、常に正のダイレイタンスを示す材料であることが必要条件となる。

②ダイレイタンス特性が、砂の様な粒状体の不安定現象に大事な特性であることを再確認した業績はもちろん評価できるのであるが、安定性の議論は、あくまでもエネルギー収支関係にその基礎を置くべきであり、ダイレイタンスという変形特性のみを取り出して安定条件を議論することが力学体系全体の中で、意味を持ち得るかどうかは疑問である。

③論文の中では、不均質な変形は見られず、端面処理は十分に行ったとしているが、安定・不安定のような問題を議論するのに十分な精度を有しているのか? 例えば、載荷板において放射線状にせん断力が発揮さ

れていれば、この成分も仕事増分に関連し、鉛直成分だけでは正しく議論することはできない。

④もし、彼らの主張するように均質な変形が供試体に発生し、端面摩擦が無視できれば、考察している系全体を力学的に安定させるためには、応力・ひずみという量だけでは表現しえない何らかの仕事増分(エネルギー変化)を考える必要がある。この様な議論を正確に行うためには、連続体力学の成果を取入れ、土質力学の基礎を充実させることが必要になる。

この様に、Ladeらの研究は、材料科学としての立場からは、砂のような粒状体の安定性の条件を議論する上で多くの問題を提起しており、満足できる形で安定性の議論を行うことは容易ではない。

#### 4. 安定性の条件に関する過去の議論

安定性の条件については、法則として成立するものではないこともあって、比較的曖昧な形で議論されることがある。例えば、「①安定性の条件は、Drucker自身が述べているように、材料の区分をするために導入されたものであって、これを満足しない材料があっても問題はない(ひずみ軟化現象も物体の性質とすれば、ひずみ軟化時は安定性の条件は満足されていない；ここではひずみ軟化現象は考慮の範囲外とする)。

②安定性の条件は十分条件であり、必要条件ではない。よって、構成式が(3)式を満足しなくても材料が安定であることには問題はない。」これらは非関連流動則を擁護する立場で述べられることであるが、これらの議論は、安定性の条件の導入過程およびその背景を十分に吟味することなく話されていることが多い。ここで強調したいことは、「材料科学としての立場からは、変形する物体がひずみ硬化時に、安定性の条件を常に満足すべきかどうか、についてはまだ結論がでていないにも係わらず、数値解析への応用の面からは、安定性の条件(構成テンソルの正定値性(後述))が材料特性として具備されて始めて、物理的に意味のある結果を与えることが保証される」という点である。

#### 5. 非関連流動則の欠点

実験事実を簡単な数式でよく表現するとされる非関連流動則は、構成式として基本的な欠点を有する(橋口、pp. 142-145, Runesson and Mroz)すなわち、

①ひずみ硬化時であっても、思いがけない不安定挙動を示すこと

②弾・塑性応答が、弾性応答よりも剛い経路が存在することである。

この二つの性質により、数値解析への使用に当たっては、思いがけない現象が生じることを念頭におく必要がある。

#### 6. 安定性の条件を満足する構成式

数値解析への応用を念頭において、安定性の条件を満足する構成式を求めた場合、関連流動則を採用する必要があるのだろうか？ その答えは二つになろう；すなわち、①もし、塑性ポテンシャルと負荷関数を1個ずつ使用するという(構成式を簡潔な形で表現するための)条件のもとでは、関連流動則を採用する必要がある(関連流動則の重要性に関する議論は例えば、Hashiguchi, 1985)。②①の条件が与えられなければ、(定式化は複雑になるが)  $\underline{C}$  の正定値性  $[\dot{\sigma}_{ij}, C_{ijkl}, \dot{\sigma}_{kl}] > 0$  for any  $\dot{\sigma}$  が満足される様に定式化すれば良いことになる。市川らはこのような考えに基づいて構成式を展開している。

7. おわりに ここで述べたことは、決して新しいことではないが、今後の構成式の発展を考える上で重要な事項である。安定性の重要性とその物理的背景を十分に認識した上での構成式の定式化の重要性を示唆することが目的である。以上、原理原則的な立場から安定性について議論した。以上の議論は非関連流動を否定することを目的としたものではない。構成式は”適材適所”的な側面を持っており、理論的な観点のみでその欠点のみを強調して有用性を否定することは妥当な考え方とは言えない。

8. 参考文献：(1)橋口(1990)：最新弾塑性学、朝倉書店(2)北川(1987)：弾・塑性力学、裳華房 (3)Hashiguchi(1985)pp25-65 in Constitutive Laws of Soils, 11th ICSMFE, (4)Runesson and Mroz(1989), Int. J., Plasticity, pp. 639-658 (5)Lade et al. (1987, 1988):pp1302-1318 and pp2173-2191, J. Engrg. Mech. ASCE (6)Vardoulakis(1988):in Num. Mtds in Geomech(Insbruck). pp155-168(7)Ichikawa(1985):in Num. Mtds in Geomech. (Nagoya), pp. 451-462