

III-183

1 次元圧密数値解析の新しい差分法

横浜国立大学 正会員 今井五郎

学生会員 ○湯 怡新

はじめに

1次元圧密過程に対する数値解析を行う際、差分法を用いる場合が多い。差分法には陰解法と陽解法との2通りの方法がある。陰解法ではどんな時間と空間の刻み方を取っても計算は常に安定するのに対し、陽解法の場合その刻み方がある条件を満たさなければ計算は安定しないことが知られている。一方、1次元圧密に関する議論がより厳密に行われてきた現在、その支配方程式は線形ではなく高度の非線形であることが分かっている。従って、通常陰解法を用いることはできず、陽解法か各支配方程式を分離して差分を行う手法に頼らざるを得ないのが実情である。特に粘性を考慮した構成方程式を取り入れた場合、収束計算が必要である上、計算の安定性を欠くという点がまだ問題として残されている。ここでは、非線形の圧密支配方程式を線形に近似させ陰解法に適用させる解析手法を紹介する。

圧密場の方程式

圧密を支配する基本則は、①質量保存則、②運動量保存則、③水の透水則、④骨格の構成則からなる。

①質量保存則

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (1)$$

②運動量保存則

運動量保存則は加速度を無視すると、次の応力のつりあい式となる。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = \frac{\partial \sigma'}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} = - (\gamma_s + e \gamma_w) \quad (2)$$

③水の透水則

Darcyの透水則が成り立つと仮定する。

$$v = - \frac{1}{1+e} \frac{k}{\gamma_w} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + (1+e) \gamma_w \right) \quad (3)$$

④骨格の構成式

分割型圧密試験結果をもとに粘性を考慮して、 $f(e, \sigma', \dot{e}) = 0$ 型の構成式を使う。

この構成モデルを図1に示す。

$$e = b - C_c \log \sigma' + C_\alpha \log \dot{e} \quad (4)$$

ただし、この構成式が適用できる前の圧密段階では弾性体とみなし、次の(4')式を使う。

$$e = e_0 - C_s \log (\sigma' / \sigma'_0) \quad (4')$$

(1)~(3)式および[a]式をまとめると(5)式になる。

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{1+e} \frac{k}{\gamma_w} \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial z} + (\gamma_s - \gamma_w) \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{1+e} \frac{k}{\gamma_w} \left\{ \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial z^2} + (0.434 C_c - \frac{1}{1+e}) \frac{\partial e}{\partial z} \left[\frac{\partial \sigma'}{\partial z} + (\gamma_s - \gamma_w) \right] \right\}$$

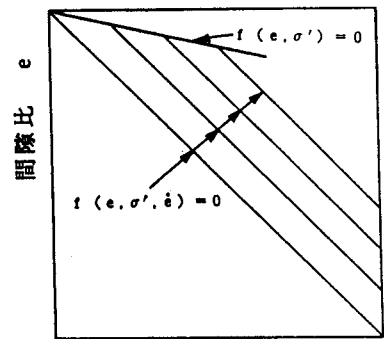
$$\therefore \dot{e} = \alpha(e) \left\{ \frac{\partial^2 \sigma'}{\partial z^2} + \beta(e) \left(\frac{\partial \sigma'}{\partial z} + \gamma' \right) \right\} \quad (5)$$

ただし、 $\frac{\partial e}{\partial t}$ は \dot{e} そのものであり、 $\gamma' = \gamma_s - \gamma_w$ である。

なお圧密中に常に $\dot{e} < 0$ であるが、以降すべてその絶対値とする。

ここに、
 z : 土骨格の実質高さに基づく縮小座標で
 上向きを正とする。
 v : 水の骨格に対する相対的な見かけ速度
 C_c : 圧縮指数
 C_α : 二次圧密係数
 透水係数 k は [a] 式で与える。

$$e = N_k + C_k \log k \quad [a]$$



有効応力 $\log \sigma'$

図1 構成モデル

ここに、

$$\alpha(e) = \frac{1}{1+e} \frac{k}{\gamma_w}$$

$$\beta(e) = (0.434 C_c - \frac{1}{1+e}) \frac{\partial e}{\partial z}$$

方程式の線形近似

通常の差分手法では、(4)式と(5)式において有効応力 σ' に対して差分を行うのであるが、非線形であることと粘性項が入っているため、これまでは陰解法で解くことが考えられなかった。そこで、本研究では有効応力 σ' そのものに対してではなく、有効応力の増分 $\Delta\sigma'$ に対して差分を行うことにした。

ある時刻 t_j での σ'_j を既知とすれば、 $t_{j+1}(=t_j+\Delta t)$ での $\sigma'_{j+1}(=\sigma'_j+\Delta\sigma')$ は次のようなルーチンを通じて確定できる。

(4)式を(6)式の形に書き直す。

$$f(e, \sigma', \dot{e}) = e - (b - C_c \log \sigma' + C_\alpha \log \dot{e}) = 0 \quad (6)$$

t_j 時刻で(6)式がすでに満足できているとすると次式が成立つ。

$$f(e_j, \sigma'_j, \dot{e}_j) = e_j - (b - C_c \log \sigma'_j + C_\alpha \log \dot{e}_j) = 0 \quad (6')$$

t_{j+1} 時刻での $\sigma'_{j+1}(=\sigma'_j+\Delta\sigma')$ を求める。

$$\begin{aligned} f(e_{j+1}, \sigma'_{j+1}, \dot{e}_{j+1}) &= e_{j+1} - (b - C_c \log \sigma'_{j+1} + C_\alpha \log \dot{e}_{j+1}) \\ &= [e_j - \dot{e}_{j+1} \Delta t] - [b - C_c \log(\sigma'_j + \Delta\sigma') + C_\alpha \log(\dot{e}_j + \Delta\dot{e})] \end{aligned}$$

$$\approx [e_j - (\dot{e}_j + \Delta\dot{e}) \Delta t] - [b - C_c (\log \sigma'_j + \frac{0.434}{\sigma'_j} \Delta\sigma') + C_\alpha (\log \dot{e}_j + \frac{0.434}{\dot{e}_j} \Delta\dot{e})] = 0$$

$$\therefore \Delta f = C_c \frac{0.434}{\sigma'_j} \Delta\sigma' - C_\alpha (\frac{0.434}{\dot{e}_j} + \Delta t) \Delta\dot{e} = \dot{e}_j \Delta t \quad (6'')$$

一方、(5)式もこのような増分形式に書き直すと次式を得る。

$$\Delta\dot{e} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \Delta\sigma'}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial \Delta\sigma'}{\partial z} \right) \quad (5')$$

(5')式を(6'')式に代入すると、 $\Delta\sigma'$ に関する線形の偏微分方程式を得る。

$$S \Delta\sigma' - R \alpha \left(\frac{\partial^2 \Delta\sigma'}{\partial z^2} + \beta \frac{\partial \Delta\sigma'}{\partial z} \right) = \Delta f \quad (7)$$

(7)式は陰解法を用いて解くことができる。この計算の安定性は通常の陰解法の場合とほぼ同様で、時間・空間の刻み方に影響されない。

計算結果

図2に示すように差分を行い、排水面 $\sigma'_o = p$ ；非排水面 $v_N = 0$ の境界条件で数値計算を行った。数値計算に用いた定数を表1に示す。この手法による数値解析結果は図3と図4に示したとおりであり、従来の計算方法の結果と一致することが判明した。

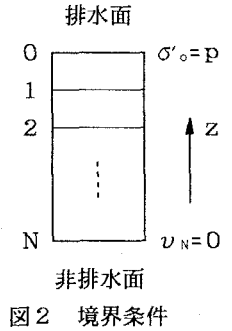


表1 数値計算に用いた諸定数

C_c	1	C_k	1.5
C_s	0.05	N_k	13.25
C_α	0.113		
γ'	1.7 (gf/cm ³)		

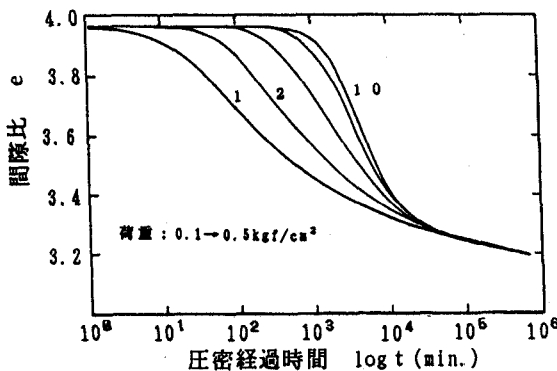


図3 各位置の間隙比変化

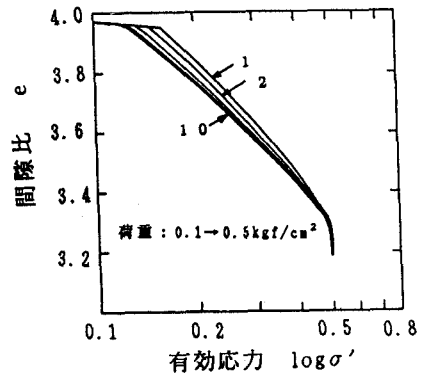


図4 $e \sim \log \sigma'$ 関係