

電力中央研究所	正員	○清水幹夫
東北学院大学工学部	正員	佐武正雄
東北大学工学部	正員	岸野佑次

1. まえがき 従来、地盤の液状化や地震動の問題において、二相系材料の解析を行う際に有限要素法(FEM)が用いられている。しかし、離散化モデルを構成する上で、間隙水圧の扱いについては様々な取り扱い方法があると考えられる。本研究においては、間隙水圧の扱いの合理化を念頭におき、最小二乗法に基づく修正有限要素法(以下、MFEMと称する)の定式化を試みた。本文においては、その概略について述べるとともに、これを応用した簡単な例題と、その考察を示す。

2. 修正有限要素法の定式化 MFEMは、解析の対象となる連続体を、まず、三角形のひずみ要素の集合体として離散化し、個々の要素に力の釣合い条件及び構成則を導入した後、要素間に生じた力の不釣合い量を最小二乗法を用いて最小化する、という手順により、最終的な連立一次方程式を得ようとするものである。以下にその概要を示す。

図-1に、分割された任意の要素eを示す。MFEMでは、力は各要素の辺(枝)を通して伝達されるものと定義する。すなわち、図-1に示すように、要素に作用する力 f_a, f_b, f_c は、それぞれ各枝の midpoint a, b, c に集中力として働く。これらの力を、枝力(branch force)と呼ぶ。

枝力と節点変位の関係は次式で表される。なお、ここでは有効応力、間隙水圧ともに圧縮を正と定義した。

$$\{f\} = [F] ([D] [B] \{u\} + \{p\}) \quad (1)$$

ここに、 $\{f\}$ 、 $\{u\}$ そして $\{p\}$ は、それぞれ枝力ベクトル、節点変位ベクトル、そして間隙水圧ベクトルである。また、 $[B]$ 、 $[F]$ はそれぞれ、ひずみ-変位マトリックス、枝力-応力マトリックスであり、要素の節点座標あるいは枝の midpoint の座標を用いて表される行列である。さらに $[D]$ は応力-ひずみマトリックスであり、ここではフック則に基づくものを用いた。

MFEMでは、間隙水圧は各要素に対して1つずつ求められる変数として扱う。したがって、各要素は定間隙水圧要素と見なすことができる。これは、要素の各節点ごとの変数として間隙水圧を扱うFEMのやり方を合理化したものといえる。以上のように求められた枝力を用いれば、図-2のように、要素1、2が枝iを共有して隣接している場合、枝iにおける不釣合い力、すなわち残差 $\{G_i\}$ は、

$$\{G_i\} = \{f^1_i\} + \{f^2_i\} \quad (2)$$

と表される。ここに、 $\{f^1_i\}$ 、 $\{f^2_i\}$ はそれぞれ要素1、2において枝iに作用する枝力である。式(2)で表された枝における残差は、1、2の両要素に均等に受け持たれるものと仮定する。したがって、図-1の、枝a, b, cよりなる要素eにおける残差 Δ_e は、

$$\Delta_e = \{ \{G_a\} + \{G_b\} + \{G_c\} \} / 2 \quad (3)$$

と書くことができる。なお、要素の枝が境界と一致する場合には、その枝における残差は1/2倍されることなく、直接要素に受け持たれるものとする。

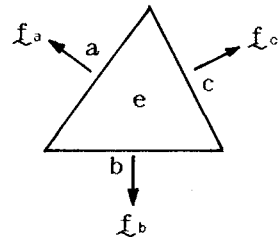


図-1 要素 e

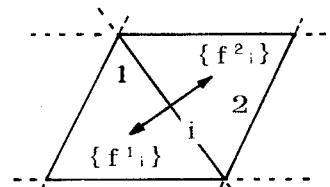


図-2 枝 i に作用する2つの枝力

要素における残差 Δ_e は、全要素にわたって合計され、次式のように最小二乗法を導入し、最小化する。

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \sum (\Delta_e \cdot \Delta_e) = 0 \tag{4}$$

ここに u_i は節点変位成分を表す。式(4)より得られる変位に関する1次方程式と、間隙水の質量保存則、

$$\{\dot{\epsilon}_v\} = k / \gamma_w (\nabla \cdot \nabla \{p\}) \tag{5}$$

を離散化した式とを連立すれば、節点変位成分 u_i と間隙水圧 p を独立変数とした連立一次方程式となり、解くことができる。ここに、 $\{\epsilon_v\}$ は要素の体積ひずみ、 k 、 γ_w はそれぞれ透水係数、水の単位体積重量であり、 $(\dot{\quad})$ は時間微分を表す。

3. 応用例 例題として、表-1に示す諸定数を用い、図-3に示す要素分割及び境界条件で二相系材料の圧縮試験のシミュレーションを行った。解析は1/10秒刻みで20秒間行い、入力荷重-時間関係を図-4に示す。透水境界は、図-3中の破線で示した部分のみとし、その他の境界はすべて非排水とした。

図-5は図-3中の要素①、②における間隙水圧-時間関係であり、図-6は図-3中の要素a~hにおける、载荷開始後5秒及び10秒の間隙水圧分布を示したものである。

4. 考察 図-5では、間隙水圧は、要素②におけるものに対して、透水境界に接する要素①におけるものの方が、間隙水の散逸のためにより小さな値となっている。また、入力荷重が一定となる時刻5秒以前に間隙水圧が一定値を示すが、これは間隙水圧の上昇と間隙水の散逸が釣り合い、定常状態となったことによるものと考えられる。図-6で間隙水圧は、時刻5秒においては透水境界から遠ざかるに伴って増加する分布となっており、時刻10秒においては間隙水が十分に散逸したため、一様な分布に移行したことがわかる。

表-1 諸定数

ヤング率	2.67×10^5 (kPa)
ポアソン比	0.45
透水係数	1.0×10^{-5} (m/s)
初期拘束圧	$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 20$ (kPa)
材料の密度 ρ	2000 (kPa)
水の密度 ρ_w	1000 (kPa)

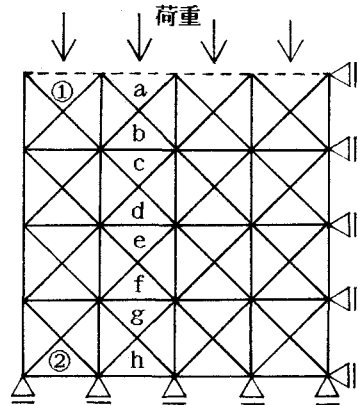


図-3 要素分割及び境界条件

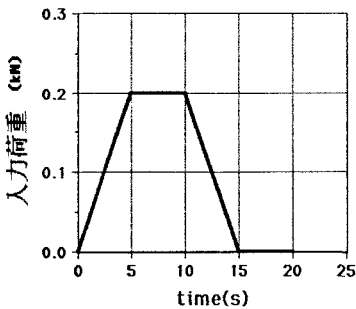


図-4 入力荷重

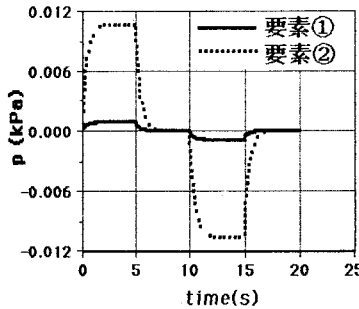


図-5 間隙水圧-時間関係

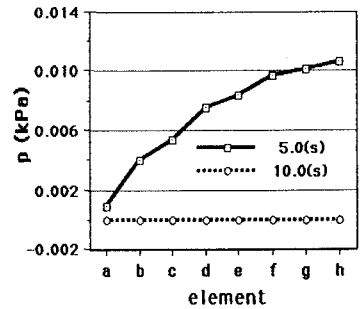


図-6 間隙水圧分布

5. あとがき 本文においては、簡単な例題を通して、MFEMにより一応の解析を行い得ることを示した。本方法は間隙水圧、力の釣り合い条件及び構成則を要素単位で考慮でき、特に間隙水圧については定ひずみ要素と一対一に対応するので、従来のFEMよりも少ない自由度で効率的な解析を可能にするものと考えられる。今後さらに詳細な検討を加えたいと考えている。