

東北学院大学 正会員 河野 幸夫

東北大学 正会員 今村 文彦

1. はじめに

2. Fourier Spectral 法について

多変数の微分方程式を1つの変数を除いた微分項を差分化し、常微分方程式として解く方法としてMOL法(Method of Lines)がGearやHindmarshらにより提案され、簡便な方法として注目されたが、差分化に伴う数値誤差(打ち切り誤差)が無視できない。ただし、この方法は常微分方程式までの変換を工夫すれば大変実用的なものとなる。そこで、本研究では、MOL法

にFourier変換(スペクトル法)を利用し数値誤差を極めて小さくする方法の検討を行なった。例としては、1次元のBurgers方程式であり、その結果について考察した。

(1) フーリエ変換について

$U(x,t)$ に対してフーリエ変換をおこなうと

$$\tilde{U}(k,t) = \int_0^{2\pi} U(x,t) e^{-ikx} dx \quad (1)$$

where k :波数、 $\tilde{U}(k,t)$:フーリエ係数、 $x: 0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$ となる。

また、フーリエ逆変換は

$$U(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{U}(k,t) e^{ikx} dk \quad (2)$$

で表され、(6)式を x で微分すると

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (ik) \tilde{U}(k,t) e^{ikx} dk \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (ik)^2 \tilde{U}(k,t) e^{ikx} dk \quad (4)$$

$$\frac{\partial^n U}{\partial x^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (ik)^n \tilde{U}(k,t) e^{ikx} dk \quad (5)$$

のように繰り返すことにより簡単に得られる。

(2) 偏微分方程式の解法

線形問題としてのBurgers方程式(一次元拡散方程式と同じ)を扱う。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6)$$

where ν : 動粘性係数 = 1

(6)式は x, t に関する偏微分方程式であるが(2)-(5)式で示されたフーリエ逆変換式を(6)式に代入することにより、次のように t に関する常微分方程式となる。

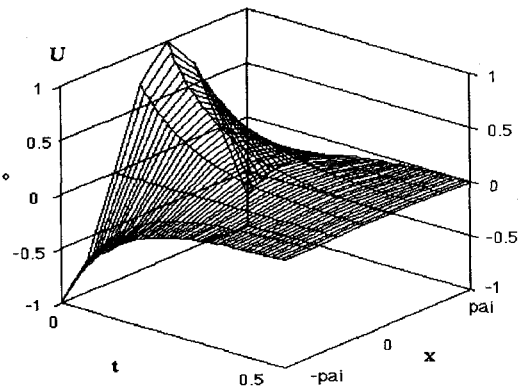


fig. 1 Result of spectral method
cos x, $n=8$, $dt=0.01$, 3D

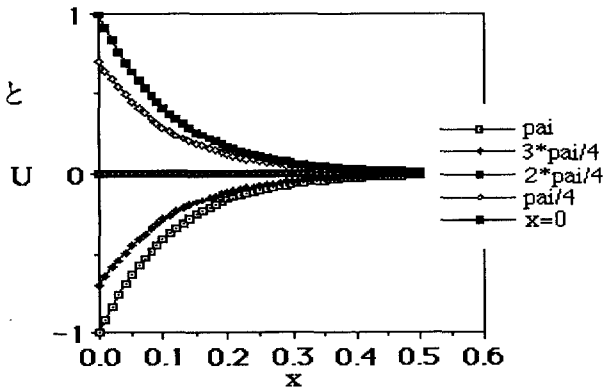


fig. 2 Result of spectral method
cos x, $n=8$, $dt=0.01$, 2D

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\tilde{U}_{(k,t)}}{dt} e^{ikx} dk = \frac{\nu}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (ik)^2 \tilde{U}_{(k,t)} e^{ikx} dk \quad (7)$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{d\tilde{U}_{(k,t)}}{dt} - \nu(ik)^2 \tilde{U}_{(k,t)} \right) e^{ikx} dk = 0 \quad (8)$$

すべての k に対して上式 (8) は成立する必要があるため $\frac{d\tilde{U}_{(k,t)}}{dt} - \nu(ik)^2 \tilde{U}_{(k,t)} = 0 \quad (9)$ が成り立つ。これは t の 1 階の常微分方程式となる。

従って、初期値 $\tilde{U}_{(k,0)}$ を与えれば (9) 式は解け、得られた値 $\tilde{U}_{(k,t)}$ を (2) 式を用いて逆変換すれば解 $U_{(k,t)}$ が求められる。この方程式の ν を 1 と置いた常微分方程式を解くことになる。

3. 解析結果

初期値としては $\cos x$ および $\sin x$ を用いた。 x の範囲は $-\pi$ より π までをとる。この時、 $N=8$ の場合は $dx=2\pi/N=\pi/5$ 、 $N=16$ の場合は $dx=2\pi/N=\pi/4$ 、 $N=32$ の場合は $dx=2\pi/N=\pi/16$ となる。図-1,2,3は $\cos x$, $n=8$, $dt=0.01$ の場合の解析結果である。

4. 厳密解

$U_{(x,t)} = e^{-t} \cos x$ は偏微分方程式 $U_t = U_{xx}$, 初期条件 $U(x,0) = \cos x$ の場合の厳密解であり、同様に、 $U_{(x,t)} = e^{-t} \sin x$ は偏微分方程式 $U_t = U_{xx}$, 初期条件 $U(x,0) = \sin x$ の場合の厳密解である。図-4は初期値 $\cos x$ の場合の解析結果である。

5. おわりに

スペクトル法を利用すれば、従来の差分を用いた MOL 法に比較して数値誤差は小さく、精度の高い解が求まると期待できる。さらに、非線形項が存在する場合にも適用でき効果的である。ただし、スペクトル法が周期性を仮定しているため、リンク効果などが無視できない場合もある。この場合には、Chebyshev 変換など不連続関数を扱えるものに変える必要がある。また、常微分方程式の解法により、計算の安定条件が存在しており、今後の検討が必要となっている。

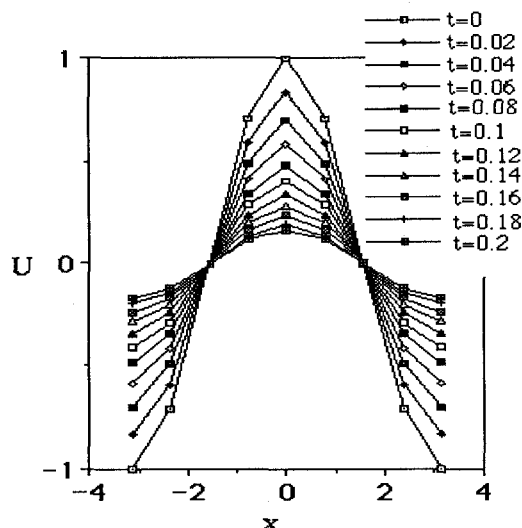


fig. 3 Result of spectral method
 $\cos x$, $n=8$, $dt=0.01$, $2Dx$

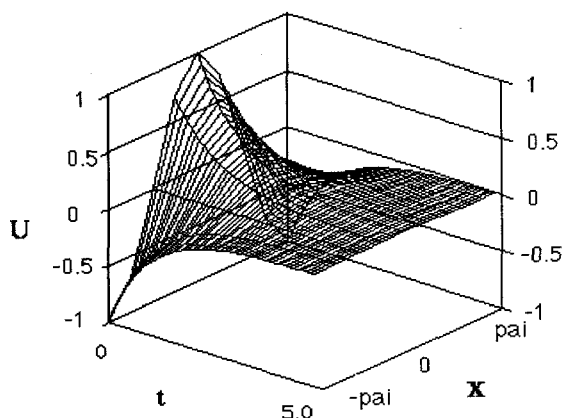


fig. 4 analytical solution
 $\cos x$, $dt=0.1$, $n=8$