

II-459

剪断振動流の半数値解析

パシフィックコンサルタンツ(株) 正員 寺島 貴 志
 北海道大学工学部 正員 浜中 建一郎
 北見工業大学 正員 佐藤 幸 雄

1. はじめに

砂漣上の振動流の挙動は砂漣のその後の発達過程に密接な関係を有しているのみならず、流体力学としても、砂漣上に発生するSteady Streamingや交互に発生する剥離、又その後の乱流への移行等興味深い多くの現象を有している。

これらの現象を扱った研究として、Hara and Mei¹⁾, Longuet-Higgins²⁾, Caponi等³⁾を挙げることができるが、1), 2)は剥離を伴った流れの場合全体が表現されていない。

本研究では、このCaponi等³⁾の方法を振動流に拡張し、剥離を伴った砂漣上の振動流の挙動特に剥離渦の上方への拡散の様子を調べることを目的とする。始めにHara and Mei¹⁾と同様に砂漣表面に沿った座標系となる様な等角写像を行い、渦度方程式を導く。次に定常な振動流状態を仮定し、流れ関数と渦度を、水平方向には砂漣の波長を基本周期とするフーリエ級数に、時間的には振動流の周期を基本周期とするフーリエ級数に展開する。これ等を基礎方程式に代入することにより、垂直方向の非線形常微分方程式に帰着する。これを、底面境界層近傍ではメッシュが密となる様な適当な差分化を行うことにより、各フーリエ係数を数値計算的に求めるものである。本報では、その定式化を述べた後、底面が平坦な最も簡単な計算例を示す。

2. 基礎方程式と等角写像

基礎方程式として、次式のNavier-Stokesの式から出発する。

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \Omega + \nu \Delta \vec{v} \quad (1)$$

今、流れは垂直2次元流とし、(1)式の両辺の回転を求め、更に、流れ関数 φ と渦度 ω を用いると次式となる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2)$$

次に以下の等角写像を用いた座標変換を行う。

$$x = \xi - ae^{-i\omega} \sin k\xi, \quad y = \eta + ae^{-i\omega} \cos k\xi \quad (3)$$

ここで、 a は砂漣の振幅、 k は砂漣の波長を表わす。この (ξ, η) 平面に基礎方程式(2)式、及び ω, φ の関係式を変換し、全ての変量を k と σ を用いて無次元化すると、

$$\left. \begin{aligned} J\omega_t + \varphi_t \omega_\xi - \varphi_\xi \omega_t - \nu(\omega_{\xi\xi} + \omega_{\eta\eta}) &= 0 \\ J\omega &= -(\varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta}), \quad J = 1 - 2\varepsilon e^{-i\omega} \cos \xi + \varepsilon^2 e^{-2i\omega} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0 : \varphi &= \varphi_t = \varphi_\eta = 0 \\ \eta = \infty : \varphi_t &= 0, \quad \varphi_\eta = \alpha \cos t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

となる。ここで $\varepsilon = ka, \alpha = kA$ 。

次に、流れ関数と渦度を ξ 軸と t 軸各々に沿ってFourier級数に展開すると、

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_m \sum_n f_{m,n} e^{i(m\xi + n\eta)}, \quad \omega = \sum_m \sum_n g_{m,n} e^{i(m\xi + n\eta)} \\ J &= h_0 + h_1(e^{i\xi} + e^{-i\xi}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで $h_0 = 1 + \varepsilon^2 e^{-2i\omega}, h_1 = -\varepsilon e^{-i\omega}$

一方、底面近傍では差分メッシュを細かくするため、

$$\eta = \eta_\tau \frac{e^{b\zeta} - 1}{e^b - 1} \quad (7)$$

で変換されると ζ 軸で等分割に差分化する。ただし $b > 1$ 。この変換では $0 \leq \eta \leq \eta_\tau$ が $0 \leq \zeta \leq 1$ に対応し、 b の値が大きい方が境界近傍を細かく分割する。(7)式から

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{e^b - 1}{b\eta_\tau} e^{-b\zeta} \equiv \zeta_1, \quad \frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = -b\zeta_1^2 \equiv \zeta_2$$

とし、さらに中央差分をとり

$$f_{m,n}(\zeta) = f_{m,n}(j\Delta\zeta) \equiv f_{m,n}^{(j)}$$

の様に記す。また、(6)式を(4)式に代入し、各周波数毎にまとめ差分化すると次式となる。

$$\begin{aligned} & inh_0 g_{m,n}^{(j)} + inh_1 (g_{m-1,n}^{(j)} + g_{m+1,n}^{(j)}) \\ & + \sum_p \sum_q \frac{\zeta_1}{2\Delta\zeta} \left\{ ip (f_{m-p,n-q}^{(j+1)} - f_{m-p,n-q}^{(j-1)}) g_{p,q}^{(j)} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\left\{ (m-p)f_{m-p,n-q}^{(j)}(g_{m,n}^{(j+1)} - g_{m,n}^{(j-1)}) \right\} \\ & -\nu \frac{\zeta_1^2}{(\Delta\zeta)^2} (g_{m,n}^{(j+1)} - 2g_{m,n}^{(j)} + g_{m,n}^{(j-1)}) + \\ & + \frac{\zeta_2}{2\Delta\zeta} (g_{m,n}^{(j+1)} - g_{m,n}^{(j-1)}) - m^2 g_{m,n}^{(j)} \Big\} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & h_0 g_{m,n}^{(j)} + h_1 (g_{m-1,n}^{(j)} + g_{m+1,n}^{(j)}) \\ & + \frac{\zeta_1^2}{(\Delta\zeta)^2} (f_{m,n}^{(j+1)} - 2f_{m,n}^{(j)} + f_{m,n}^{(j-1)}) + \frac{\zeta_2}{2\Delta\zeta} (f_{m,n}^{(j+1)} - f_{m,n}^{(j-1)}) \\ & - m^2 f_{m,n}^{(j)} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

一方、境界条件は、以下の様になる

$$f'_{0,1} = f'_{0,-1} = \frac{\alpha}{2\zeta_1} \quad \text{ただし} \quad \zeta=1$$

3. 簡単な計算例

この節では、この方法の基本的な性質を調べるため、最も簡単な計算条件のもとでの計算例を示す。底面は平坦とし、水平方向のFourier係数は全て零とする。時間軸上のFourier係数は基本周期成分以外を全て零とする。従って求める係数は(8),(9)式中の $f_{0,1}$ と $g_{0,1}$ だけである。これ等は複素数であるから実部と虚部に分離し、 $f_{0,1} = f_R + if_I$, $g_{0,1} = g_R + ig_I$ とする。

図1, 2は $\eta_\tau = 10$ とし、 ζ の分割数 N と η 軸の歪度 b を変えて求めた f_R , f_I , g_R , g_I の値である。縦軸は ζ の値である。なお、振動流の振幅は単位量1をとっている。また、図中のFourier係数の値も無次元量である。図中○印が今回の方法で求めた値で、実線が解析解である。全体的に見て解析解の値と良く一致している様であるが、流れ関数の実部の上部(FRの $\zeta=1$ 近傍)と渦度の虚部の底面近傍(g_I の $\zeta=0$ 近傍)にまだ有意な差異が見られ、 b を大きくした方が底面での渦度は解析解に近付き、 N を大きくした方が上部での流れ関数の値は解析解に近づく様である。

現在のところ、最も簡単な例を示しただけであるが、この結果から、まえがきに述べた砂漣上の剥離を伴った振動流の計算に対する可能性が確かめられたと思われる。

参考文献

- 1) Hara, T. and Mei, C.C. :
Oscillating flow over periodic ripples,

J. Fluid Mech., vol. 211, pp.183 - 209, 1990

- 2) Longuet - Higgins, M.S. :
Oscillating flow over steep sand ripples, J. Fluid Mech., vol.107, pp.1 - 35, 1981
- 3) Caponi, E.A.etal :
Calculations of laminar viscous flow over a moving wavy surface, J. Fluid Mech., vol.124, pp.347 - 362, 1982

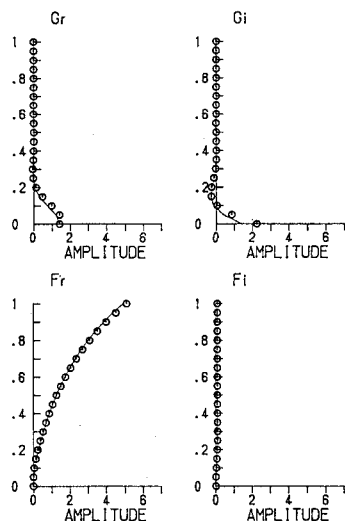


図1 渦度(上)と流れ関数(下)の実部(左)と虚部(右) $b=2$, $N=20$

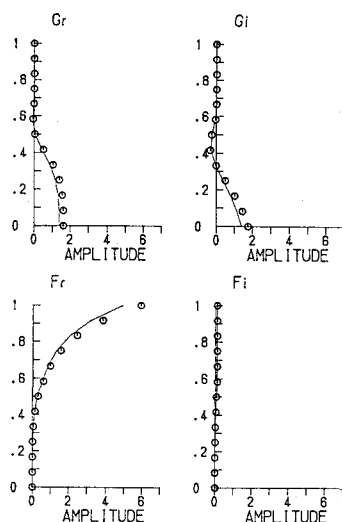


図2 渦度(上)と流れ関数(下)の実部(左)と虚部(右) $b=5$, $N=12$