

II-320

一般曲線座標系を用いた流れの2次元数値解法

北海道開発コンサルタント㈱

正員 山下恭正

開発土木研究所 河川研究室

正員 清水康行

正員 崇田徳彦

北海道開発コンサルタント㈱

正員 荒井信行

正員 三谷紀一

1. はじめに

我が国の河川は、その大部分が急流河川であり、床止工や水制工などの急流河川工法が占める割合が非常に大きい。従来より、河川研究室では2次元浅水流モデルにより河川の流れの予測を行って来たが、直交格子を用いていることや差分式上の問題から、複雑な地形形状を有し、また流れが急変する場合においては適用がやや困難であった。

ここでは、任意の河道形状を有する水域における2次元流れを、一般曲線座標系やMacCormack法の導入による高精度な数値解法について述べたものである。

2. 一般曲線座標系における St. Venant 方程式

一般曲線座標系による有限差分法は、デカルト座標系にかえて地形形状に沿った一般曲線座標系を導入し、その上で離散化するために、地形形状の表現、境界条件の処理、および高精度の差分法の利用が比較的容易にできる。ここで直交直線座標系における2次元 St. Venant 浅水流方程式を一般曲線座標系に変換すると以下のようである。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial \psi} + \frac{\partial C}{\partial \phi} = D_\psi + D_\phi \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad D_\psi = \begin{pmatrix} d_\psi^1 \\ d_\psi^2 \\ d_\psi^3 \end{pmatrix}, \quad D_\phi = \begin{pmatrix} d_\phi^1 \\ d_\phi^2 \\ d_\phi^3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$a_1 = \frac{h}{J}, \quad a_2 = \frac{hu^*}{J}, \quad a_3 = \frac{hu^\phi}{J} \quad (3)$$

$$b_1 = \frac{hu^*}{J} \quad (4)$$

$$b_2 = \frac{1}{J} \left[h(u^*u^* + \frac{\psi_s}{2}gh) - \epsilon \left\{ \psi_s \left(\psi_s \frac{\partial(u^*h)}{\partial \psi} + \phi_s \frac{\partial(u^*h)}{\partial \phi} \right) + \psi_s \left(\psi_s \frac{\partial(u^\phi h)}{\partial \psi} + \phi_s \frac{\partial(u^\phi h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \quad (5)$$

$$b_3 = \frac{1}{J} \left[h(u^*u^\phi + \frac{\psi_s}{2}gh) - \epsilon \left\{ \psi_s \left(\psi_s \frac{\partial(u^*h)}{\partial \psi} + \phi_s \frac{\partial(u^*h)}{\partial \phi} \right) + \psi_s \left(\psi_s \frac{\partial(u^\phi h)}{\partial \psi} + \phi_s \frac{\partial(u^\phi h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \quad (6)$$

$$c_1 = \frac{hu^\phi}{J} \quad (7)$$

$$c_2 = \frac{1}{J} \left[h(u^*u^* + \frac{\phi_s}{2}gh) - \epsilon \left\{ \phi_s \left(\psi_s \frac{\partial(u^*h)}{\partial \psi} + \phi_s \frac{\partial(u^*h)}{\partial \phi} \right) + \phi_s \left(\psi_s \frac{\partial(u^\phi h)}{\partial \psi} + \phi_s \frac{\partial(u^\phi h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \quad (8)$$

$$c_3 = \frac{1}{J} \left[h(u^*u^\phi + \frac{\phi_s}{2}gh) - \epsilon \left\{ \phi_s \left(\psi_s \frac{\partial(u^*h)}{\partial \psi} + \phi_s \frac{\partial(u^*h)}{\partial \phi} \right) + \phi_s \left(\psi_s \frac{\partial(u^\phi h)}{\partial \psi} + \phi_s \frac{\partial(u^\phi h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \quad (9)$$

$$d_\psi^1 = 0, \quad d_\psi^2 = \frac{1}{J} \left[-gh\psi_s \frac{\partial \eta}{\partial \psi} - \frac{C_f}{J} \phi_s u^* \sqrt{(u^*)^2 + (u^\phi)^2} \right], \quad d_\psi^3 = \frac{1}{J} \left[-gh\psi_s \frac{\partial \eta}{\partial \psi} + \frac{C_f}{J} \phi_s u^* \sqrt{(u^*)^2 + (u^\phi)^2} \right] \quad (10)$$

$$d_\phi^1 = 0, \quad d_\phi^2 = \frac{1}{J} \left[-gh\phi_s \frac{\partial \eta}{\partial \phi} + \frac{C_f}{J} \psi_s u^* \sqrt{(u^*)^2 + (u^\phi)^2} \right], \quad d_\phi^3 = \frac{1}{J} \left[-gh\phi_s \frac{\partial \eta}{\partial \phi} - \frac{C_f}{J} \psi_s u^* \sqrt{(u^*)^2 + (u^\phi)^2} \right] \quad (11)$$

ただし、 u^* 、 u^ϕ は ψ 、 ϕ 方向の流速の反変成分、 η は河床高、 h は水深、 g は重力加速度、 ϵ は渦動粘性係数、 C_f は河床の摩擦係数であり、マンニングの粗度係数 n を用いて $C_f = g n^2 / h^{1/3}$ で表される。

3. MacCormack の差分スキーム

2次元のMacCormack差分法による計算方法の概略を以下に示す。 n を時間ステップ、 i および j を空間上の格子点番号とすると、ある変量 $U_{i,j}^{n+1}$ の Δt 秒後の値を $U_{i,j}^{n+1}$ を次式で求める。

$$U_{i,j}^{n+1} = [L_\psi(\Delta t_\psi)]^m [L_\phi(\Delta t_\phi)]^l [L_\psi(\Delta t_\psi)]^l [L_\phi(\Delta t_\phi)]^m U_{i,j}^n \quad (12)$$

ただし、 L_ψ 、 L_ϕ は各々 ψ 、 ϕ の方向の差分演算子であり、時間間隔 $\Delta t = 2m\Delta t_\psi = 2l\Delta t_\phi$ である。また、 L_ψ 、 L_ϕ は通常のMacCormack法と同様に予測子と修正子の2段階に分けて計算を行うものとする。計算は初期条件から、各変数が定常状態に収束するまで繰り返し時間進行計算を行うものとする。

4. 実験水路における計算例

実験は河床勾配1/180の複断面直線水路で、途中落差0.03mの床止工を有する。計算は表-1の条件で、初期条件から流れがほぼ定常となった30秒経過後の流速および水位を求めた。計算結果を図-1の水位等縦断面図および図-2の流速ベクトル図に示す。

表-1 水理実験条件

流路延長	17.940m (x= 10.000~27.940m)
床止工設置場所	上流より18.24m (SP10.700m)
流量	0.08 m^3/s
低水路粗度係数	0.016
高水路粗度係数	0.023

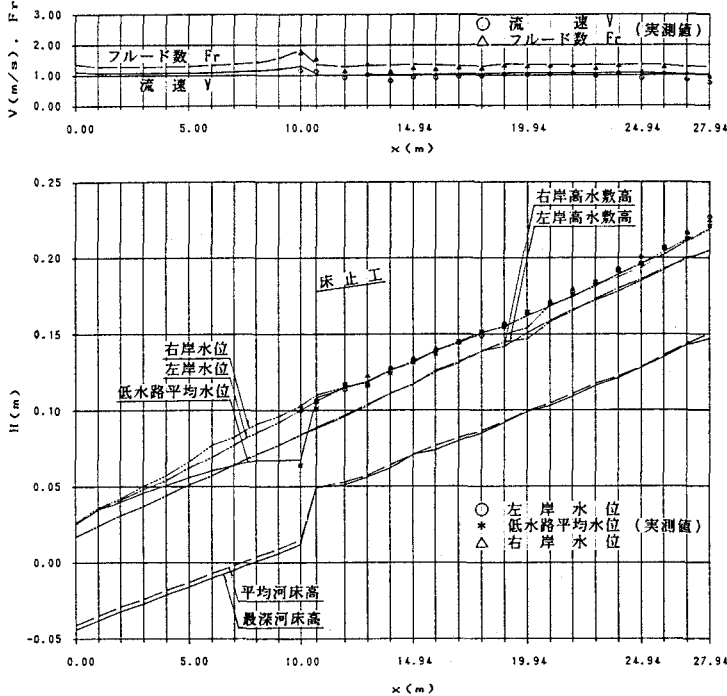


図-1 流速、フルード数、水位縦断面

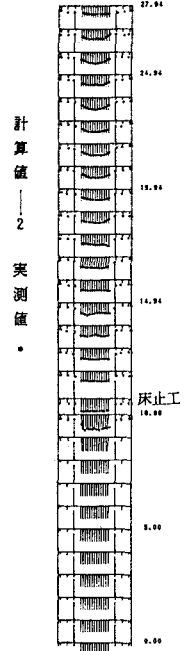


図-2 流速ベクトル図

実験値を計算結果と比較してみると、段落ち部での低水路水位の落ち込み、左右岸水位の独立性や流速・フルード数の急激な変化など跳水現象を伴う複断面水路の複雑な流れをほぼ正確に再現していることがわかる。

5. 考察

得られた主要な結果を示せば以下のようである。

- (1) 一般曲線座標系における2次元 St. Venant 浅水方程式を示した。一般曲線座標系による有限差分法は、地形形状の表現、境界条件の処理および高精度の差分法の利用が比較的容易にできる。
- (2) 基礎方程式の離散化に時間分割 MacCormack 法を用いた。MacCormack 法は時間と空間で2次精度で、跳水現象等を含み局所的に流れが急変する場合に有効な差分法である。
- (3) 本モデルを床止工を含む実験水路に適用し、その有効性を明らかにした。

本モデルは開発途上のものであるが、今後、境界条件の設定法の検討、離散化法の改良、収束加速法の導入などを行って、実水域での検証を進めなければならないと考えられる。

参考文献

- 1) 清水康行、板倉忠興；河川における2次元流れと河床変動の計算、北海道開発局土木試験所報告第85号、昭和61年
- 2) R. Garcia and R. Kawawita; Numerical solution of the St. Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.5, 1986.
- 3) D. Anderson, J. Tannehill and R. Pletcher; Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, 1984.