II-314 ベキ乗則で表される断面特性の一様でない水路に限界流が生ずる場合の境界特性

株式会社協和技研　正員　浅野　優

1　はじめに

このことについて、前回の年講[7]においては考察対称断面形はこれを特定しない一般断面形及び三種類の特定断面形(長方形、二次放物線、三角形)で明らかにし特定の遷移形式の境界特性であることを報告した。

本文は、考察の対称断面形を理論的実用的に重要な「水路の断面特性がベキ乗則で表される[1]場合の断面形」について、その断面形一般の境界特性を明らかにし、実務上の指針を得ることを目的とする。

まず、実務上用いられている支配断面の水理によって境界特性を明らかにし、次いでトポロジー的分類上の位置付けを見るためその基礎となる微分方程式を得、これによりその位置付けを確かめた。尚、双方の場合を通じてマンニングの流れとシエジーの流れとの両方をみたがそれを同一式中の項の加除で表した。

以下、形状要素(k)が変化する水路の遷移点で擬似等流水深曲線と限界水深曲線（以下、両曲線という。）が「接触して切り合う」場合を、ベキ乗則で表される断面形の広幅員の場合について考察を進める。

2　基本となる基礎方程式　（支配断面の水理）[1)~6)]

簡単のため流下方向に流出、流入流量のない不浸透性の水路とすると両曲線は、断面形を特定しない基礎的な一般断面形では次式で表される。なお、記号については参考文献[4]に従っており説明は省略する。

$$i-n^2Q^2/R^{4/3}A^2+\alpha Q^2/gA^3\cdot\partial A/\partial x=0$$

$$1-\alpha Q^2/gA^3\cdot\partial A/\partial h=0$$

ベキ乗則で表せる断面形は次の形状要素係数(k_A, K_B, K_R)と指数(w, a, r)の単一項で表せるものとする[1]

（水面幅）　$B=K_Bh^w$　$A=K_Ah^a$　$R=K_Rh^r$　　（断面形別は次頁表中上段に示す）

ここに、K_B, K_A, k_Rはxの関数 w, a, rは定数とする。このとき$A=\int_0^h B\,dh$[6] より $A=K_B(1/(W+1)h^{w+1}$ 従ってa=w+1、$K_A=K_B/a$の関係にある。よって$\partial A/\partial h=K_Aah^{a-1}=B$, $\partial A/\partial x=h^a\cdot dK_A/dx$, 他方$A=h/a\cdot B$よって$\partial A/\partial x=h/a\cdot\partial B/\partial x=\partial A/\partial B\cdot\partial B/\partial x$、更に広幅員により$R=A/B=h/a$と近似できる。しかるとき上記２式は次のように表せる。

$$i-n^2Q^2a^{4/3}/k_A{}^2h^{2a+4/3}+\alpha Q^2/gK_A{}^3h^{2a}\cdot dK_A/dx=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$1-\alpha Q^2a/gk_A{}^2h^{2a+1}=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

上記２曲線の交点における遷移水面形曲線の水面勾配は極限演算により次の二次方程式で示される。

$$(2a+1)/h\cdot(dh/dx)^2+[4/K_A\cdot dK_A/dx+\partial(n^2Q^2a^{4/3}/K_A{}^2h^{2a+4/3})/\partial h]\cdot(dh/dx)+[\partial(n^2Q^2a^{4/3}/K_A{}^2h^{2a+4/3})/\partial x$$
$$+3h/k_A{}^2a\cdot(dK_A/dx)^2-h/K_Aa\cdot(d^2K_A/dx^2)=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

ここで(i)を定数としている。なお、遷移点での値を示す添字 $_c$ は省略している。（以下、同じ。）

3　両曲線が接触する条件から得られる関係式

(1)及び(2)式を連立方程式として解く、このとき両方の流水断面積K_Ah^aが等しいすると次の(4) 式を，また水深hが等しいとすると同じく(5)式を得る。 断面形別には次頁表中に式(4),式(5)として示す。

$$(dK_A/dx)=(gn^2a^{1/3}/\alpha h^{1/3}-i)ak_A/h \quad\cdots\cdots(4)$$

$$(dK_A/dx)=[(g/\alpha)^{1+1/3\zeta}\cdot n^2\cdot a^{2a/3\zeta}\cdot(K_A/Q)^{2/3\zeta}-i](g/\alpha Q^2)^{1/\zeta}\cdot a^{1-1/\zeta}\cdot K_A{}^{1+2/\zeta} \quad\cdots\cdots(5)$$

ここに、$\zeta=(2a+1)$、上記式(4)、(5)の小、中括弧内第１項は局部的限界勾配であり以下i_cと表す。

式(1)の擬似等流水深曲線の微分係数$(dh/dx)_0$と式(2)の限界水深曲線の微分係数$(dh/dx)_c$とを求め両方の値が等しいとして連立方程式として解き次式を得る。断面形別には次頁表に式(6)として示す。

$$(d^2k_A/dx^2)=[(2a+3)/(2a+1)]/K_A\cdot(dK_A/dx)^2+2/3(2a+1)\cdot i_c\cdot a/h\cdot(dK_A/dx) \quad\cdots\cdots(6)$$

上式に於て「網かけ修飾」をした項が、マンニングの流れの場合シエジーの流れに対して加わることを表している。（以下、同じ。）なお、上式が境界特性を表す最も基本的な関係式である。

4　遷移水面形曲線の水面勾配

(6)式の値を(3)式に用いて次のように遷移水面形曲線の水面勾配である負値と他方の正値の２値を得る。

$(dh/dx)=\{-[2a(i_c-i)-i_c(a+1/2+1/6)]\pm[-i_c(a+1/2+1/6)]\}/(2a+1)$ ……………………(7)

上式の式の形は支配断面一般の遷移流の考察に対しても有用であることを示唆している。

5　一定の区間が限界流になる場合の形状要素の関係式

シエジーの流れでは i_c を定数として扱い理論解析により(5)式から下表の(8)式を得られるがマンニングの流れでは i_c は変数とすることから理論解析による同一式中の項の加除による表示は困難であった。但し、両方の対比はこの際重要なので別途数値解析により行った。その代表的例をまとめて次に記す。

＊計算始点でシエジーとマンニングの i_c を等しくした場合、流下距離(x)に伴う形状要素の値はシエジーの流れに対しマンニングの流れでは緩勾配($i_c>i$)のときは大、急勾配($i_c<i$)のときは小になる相違が表れる＊

6　限界流のトポロジー的分類[1),2),3)]

遷移点近傍の解析に用いられる微分方程式はベキ乗則で表せる断面形の場合を求めると次の様である。

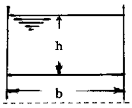
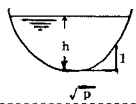
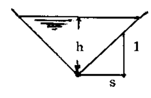
$dh/dx=\{ai_c^2[1/3a^2\cdot m-(1-\sigma)(1-3\sigma)]x+i_c(1+1/3+2a\sigma)h\}/[2ai_c(1-\sigma)x+(2a+1)h]$ ……(9)

ここに、$m=3h^2(d^2k_A/dx^2)/k_A i_c^2$,　$\sigma=i/i_c$

上記式から $\sigma-m$ 平面上の鞍形点と結節点の領域区分線を表す二次方程式の解はつぎのようである。

$\sigma=1+1/3(2a+3)\pm[(1/3(2a+3)^2+(2a+1)/3(2a+3)a^2\cdot m]^{1/2}$ ……………………………(10)

7　断面形別境界特性の関係式

式番号、名称等	長方形	放物線形	三角形
流水断面積 $A=K_A\cdot h^a$ 水面幅 $B=K_B\cdot h^w$ 径深 $R=A/B=K_R\cdot h^r$	$b\cdot h$ $b\cdot h^0$ h 	$(4/3)p^{1/2}\cdot h^{3/2}$ $2p^{1/2}\cdot h^{1/2}$ $2/3\cdot h$ 	$s\cdot h^2$ $2s\cdot h$ $h/2$ 
式 (1)	$i-n^2Q^2/b^2h^{10/3}+\alpha Q^2/gb^3h^2\cdot(db/dx)=0$	$i-3^{10/3}n^2Q^2/2^{16/3}ph^{13/3}+9\alpha Q^2/32gp^2h^3\cdot(dp/dx)=0$	$i-2^{4/3}n^2Q^2/s^2h^{16/3}+\alpha Q^2/gs^3h^4\cdot(ds/dx)=0$
式 (2)	$1-\alpha Q^2/gb^2h^3=0$	$1-27\alpha Q^2/32gph^4=0$	$1-2\alpha Q^2/gs^2h^5=0$
式 (4)	$db/dx=(i_c-i)b/h$	$dp/dx=3(i_c-i)p/h$	$ds/dx=2(i_c-i)s/h$
式 (5) $dk/dx=f(k)$	$db/dx=(i_c-i)(g/\alpha Q^2)^{1/3}b^{5/3}$	$dp/dx=3(i_c-i)(32/27\cdot g/\alpha Q^2)^{1/4}p^{5/4}$	$ds/dx=2(i_c-i)(g/2\alpha Q^2)^{1/5}s^{7/5}$
式 (6) $d^2k/dx^2=f(k)$	$d^2b/dx^2=5/3\cdot 1/b\cdot(db/dx)^2+2/9\cdot i_c/h\cdot(db/dx)$	$d^2p/dx^2=5/4\cdot 1/p\cdot(dp/dx)^2+1/4\cdot i_c/h\cdot(dp/dx)$	$d^2s/dx^2=7/5\cdot 1/s\cdot(ds/dx)^2+4/15\cdot i_c/h(ds/dx)$
式 (8) $k=k(x)$ (但し、D：積分定数)	$b=\{-(2/3)[(i_c-i)(g/\alpha Q^2)^{1/3}x+D]\}^{-3/2}$	$p=\{-(1/4)[3(i_c-i)(32/27\cdot g/\alpha Q^2)^{1/4}x+D]\}^{-4}$	$s=\{-(2/5)[2(i_c-i)(g/2\alpha Q^2)^{1/5}x+D]\}^{-5/2}$
式(3) (7) $(dh/dx)_1=$ の解 (7) $(dh/dx)_2=$	$-2/3\cdot(i_c-i)$ $(dh/dx)_1+i_c(1+1/9)$	$-3/4\cdot(i_c-i)$ $(dh/dx)_1+i_c(1+1/12)$	$-4/5\cdot(i_c-i)$ $(dh/dx)_1+i_c(1+1/15)$
式(10)関係 $\sigma=$	$1+1/15\pm(1/15^2+m/5)^{1/2}$	$1+1/18\pm(1/18^2+m/10.125)^{1/2}$	$1+1/21\pm(1/21^2+m/16.8)^{1/2}$

8　おわりに

以上、断面特性がベキ乗則で表される断面形一般について本題の遷移形式の境界特性が明らかになったと共に、上記表中に示した三種類の断面形外に任意に無数に考えられる具体のベキ乗則の断面形の境界特性が容易に得られることとなったことは、理論的実用的に有用であると考えられる。

尚、遷移点近傍の解析に用いられる微分方程式をベキ乗則で表せる断面形について得、本題の遷移形式が σ-m平面上鞍形点、結節点の何れにも属しないことを確かめたことは理論的に重要なことと考えられる。

参考文献
1) 玉井信行：水理学1、培風館 pp,121~130,1989　2) 椿 東一郎：水理学I,森北出版 pp,160~165,1987
3) 岩佐義朗：開水路流れの基礎理論、土木学会水理委員会 pp,35~39、1967
4) 土木学会：水理公式集、pp,16 ~18，1985　5)　前出 4) pp 11
6) 鮏川　登：水理学，コロナ社 pp,191　1988　7) 土木学会第45回年次講演会 II-194