

II-297

一般座標系を用いた2次元流れと河床変動の計算

開発土木研究所 正 員 清水康行

開発土木研究所 正 員 畑 敏夫

北海道大学 正 員 板倉忠興

1. はじめに: 著者らは従来より2次元の浅水流方程式と河床変動の式を組み合わせた数値計算モデルを用いて沖積河川の河床変動の検討を行ってきた。しかしながら、従来の計算モデルでは用いている基礎式の性格上(直交座標を用いている)流下方向に川幅の変化が無い場合のみに適用可能であり、急拡や急縮あるいは人工的な構造物の存在する場合への適用は困難であった。そこで、ここではより一般的な境界条件へも適用可能とするため、一般曲線座標系による基礎式を用いた数値計算モデルを開発し、その適用性を検討するものである。

2. 基礎式: ψ, ϕ を一般曲線座標軸とすると流れの連続式および運動方程式は(1)~(3)で表わされる。ここで、 h は水深、 H は水位、 g は重力加速度、 $\psi_x = \partial\psi/\partial x$, $\psi_y = \partial\psi/\partial y$, $\phi_x = \partial\phi/\partial x$, $\phi_y = \partial\phi/\partial y$, $J = \phi_y\psi_x - \psi_y\phi_x$, x, y は直線直交座標軸である。 u^ψ, u^ϕ および τ^ψ, τ^ϕ はそれぞれ ψ, ϕ 軸に関する流速および河床せん断力の変成分であり、(4)~(6)式で表される。(7)式は ψ, ϕ 座標における流砂連続式であり、ここで、 $\eta(=H-h)$ は河床高、 t は時間、 λ は空隙率である。 q^ψ, q^ϕ は流砂量の反変成分であり、水深平均流の流線方向 s とこれに直交する方向 n に分離すると(8)、(9)式で表される。 s, n の方向は水深平均流速成分を用いて(10)式で表わされる。この関係を用いて q^ψ, q^ϕ は(11)、(12)式の様になる。ここで、 u_ψ, u_ϕ は流速の共変成分であり(13)式で与えられる。流線方向の流砂量 q^s はM.P.M.式により、これと直交する n 方向の流砂量は長谷川¹⁾による(14)式を用いて求められる。ここで、 τ_* および τ_{*c} は無次元せん断力および無次元限界せん断力であり、 $N_* = 7$ とした(Engelund²⁾)。ここで、 ρ_s, d は砂粒子の密度と粒径である。

(14)式中の r は流線の曲率半径であり(15)式で表わされる。従来 r は座標軸の曲率半径を用いていたが、(15)式を用いることにより流線が曲がっている場合の2次流を考慮することが可能になる。また、(14)式中の $\partial\eta/\partial n$ は流線の方角を考慮して(16)式で表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{hu^\psi}{J}\right) + \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{hu^\phi}{J}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \psi_x \left\{ \frac{\partial}{\partial\psi} \left[\frac{1}{J^2} (\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi) u^\psi \right] + \frac{\partial}{\partial\phi} \left[\frac{1}{J^2} (\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi) u^\phi \right] \right\} \\ & + \psi_y \left\{ \frac{\partial}{\partial\psi} \left[\frac{1}{J^2} (-\phi_x u^\psi + \psi_x u^\phi) u^\psi \right] + \frac{\partial}{\partial\phi} \left[\frac{1}{J^2} (-\phi_x u^\psi + \psi_x u^\phi) u^\phi \right] \right\} \\ & = -\frac{g}{J} \left[(\psi_x^2 + \psi_y^2) \frac{\partial H}{\partial\psi} + (\psi_x \phi_x + \psi_y \phi_y) \frac{\partial H}{\partial\phi} \right] - \frac{\tau_b^\psi}{\rho h J^2} + D^\psi \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \phi_x \left\{ \frac{\partial}{\partial\psi} \left[\frac{1}{J^2} (\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi) u^\psi \right] + \frac{\partial}{\partial\phi} \left[\frac{1}{J^2} (\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi) u^\phi \right] \right\} \\ & + \phi_y \left\{ \frac{\partial}{\partial\psi} \left[\frac{1}{J^2} (-\phi_x u^\psi + \psi_x u^\phi) u^\psi \right] + \frac{\partial}{\partial\phi} \left[\frac{1}{J^2} (-\phi_x u^\psi + \psi_x u^\phi) u^\phi \right] \right\} \\ & = -\frac{g}{J} \left[(\psi_x \phi_x + \psi_y \phi_y) \frac{\partial H}{\partial\psi} + (\phi_x^2 + \phi_y^2) \frac{\partial H}{\partial\phi} \right] - \frac{\tau_b^\phi}{\rho h J^2} + D^\phi \end{aligned} \quad (3)$$

$$u^\psi = u^x \psi_x + u^y \psi_y, \quad u^\phi = u^x \phi_x + u^y \phi_y \quad (4)$$

$$\tau_b^\psi = \tau_b^x \psi_x + \tau_b^y \psi_y, \quad \tau_b^\phi = \tau_b^x \phi_x + \tau_b^y \phi_y \quad (5)$$

$$\tau_b^x = \rho C_f u^x V, \quad \tau_b^y = \rho C_f u^y V, \quad V = \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2} \quad (6)$$

$$\frac{1-\lambda}{J} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial\psi} \left(\frac{q^\psi}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{q^\phi}{J} \right) = 0 \quad (7)$$

$$q^\psi = \frac{\partial\psi}{\partial s} q^s + \frac{\partial\psi}{\partial n} q^n = \left(\psi_x \frac{\partial x}{\partial s} + \psi_y \frac{\partial y}{\partial s} \right) q^s + \left(\psi_x \frac{\partial x}{\partial n} + \psi_y \frac{\partial y}{\partial n} \right) q^n \quad (8)$$

$$q^\phi = \frac{\partial\phi}{\partial s} q^s + \frac{\partial\phi}{\partial n} q^n = \left(\phi_x \frac{\partial x}{\partial s} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial s} \right) q^s + \left(\phi_x \frac{\partial x}{\partial n} + \phi_y \frac{\partial y}{\partial n} \right) q^n \quad (9)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{u^x}{V}, \quad \frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{u^y}{V}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{u^y}{V}, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \frac{u^x}{V} \quad (10)$$

$$q^\psi = \left(\psi_x \frac{u^x}{V} + \psi_y \frac{u^y}{V} \right) q^s + \left(-\psi_x \frac{u^y}{V} + \psi_y \frac{u^x}{V} \right) q^n = \frac{1}{V} (u^\psi q^s - J u_\phi q^n) \quad (11)$$

$$q^\phi = \left(\phi_x \frac{u^x}{V} + \phi_y \frac{u^y}{V} \right) q^s + \left(-\phi_x \frac{u^y}{V} + \phi_y \frac{u^x}{V} \right) q^n = \frac{1}{V} (u^\phi q^s - J u_\psi q^n) \quad (12)$$

$$u_\psi = \frac{1}{J} (\phi_y u^x - \phi_x u^y), \quad u_\phi = \frac{1}{J} (-\psi_y u^x + \psi_x u^y) \quad (13)$$

$$q^n = q^s \left(\frac{h}{r} N_* - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\mu_s \mu_k \tau_*}} \frac{\partial\eta}{\partial n} \right), \quad \tau_* = \frac{u_*^2}{(\rho_s/\rho - 1)gd} = \frac{C_f V^2}{(\rho_s/\rho - 1)gd} \quad (14)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{V^3} \left[u^\psi \left(\frac{\partial u^y}{\partial\psi} u^x - \frac{\partial u^x}{\partial\psi} u^y \right) + u^\phi \left(\frac{\partial u^y}{\partial\phi} u^x - \frac{\partial u^x}{\partial\phi} u^y \right) \right] \quad (15)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial n} = \frac{J}{V} \left(u_\psi \frac{\partial\eta}{\partial\phi} - u_\phi \frac{\partial\eta}{\partial\psi} \right) \quad (16)$$

3. 計算法：与えられた平面上の計算領域において任意に ψ, ϕ 軸を設定し（直交している必要は無い）、(1)~(3)式で流れの計算を行ない、(7)式で河床変動の計算を行う。計算法は従来どおり差分法により行い与えられた河床高の初期条件から必要な時間が経過した後の河床高を求める。境界条件は流れが常流の場合上流端で流速を、下流端で水位を与える。

4. 適用例：上記のモデルを板倉³⁾による急拡、急縮を含む移動床実験に適用する。実験は中央部に幅20cmの狭窄部を含む長さ20m、幅1m、勾配1/330の直線水路で河床材料として粒径0.94mmの砂を用い、初期河床を一定勾配として一定流量20.6l/sを135分通水し、河床形状の測定が行われている。計算もこれと同じ条件で行うこととした。ここでは、設定する計算座標が計算結果に与える影響も調べるため、図-1(ケース1)および図-2(ケース2)に示す2種類の計算座標を採用することとした。図-3に実験結果および計算結果の河床コンター図を、図-4に水路中心の縦断面形状を示す。いずれも計算結果は実験値とよく適合しており、計算座標の違いによる計算結果の違いもそれほど顕著ではない。

5. おわりに：任意の平面形状に適用可能な一般曲線座標を用いた2次元流れと河床変動の計算モデルを開発した。モデルの検証は急拡、急縮を含む水路実験を用いて行われ、計算座標の設定法が計算結果に与える影響も、計算座標を故意に歪ませることにより検討を行なった。特に、本文のケース2のように極端に歪んだ計算座標を用いてもほぼ妥当な計算結果が得られることが確かめられたことにより、今後実河川の構造物等を含む複雑な境界条件下の計算への応用が期待出来る。

参考文献：

- 1) 長谷川和義；沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究、北海道大学博士論文、1984。
- 2) Engelund, F.; Flow and Bed Topography in Channel Bends, Jour. of Hydraul. Div., ASCE, 100(HY11), 1974.
- 3) 板倉忠興 他；河川の機能に関する基礎的研究、北海道開発局委託研究報告、1988。

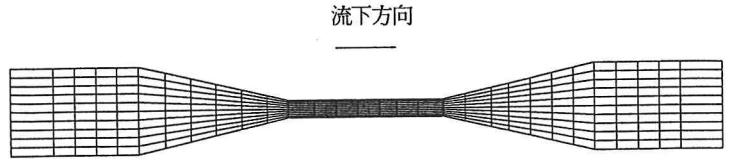


図-1 ケース1の計算座標の配置法

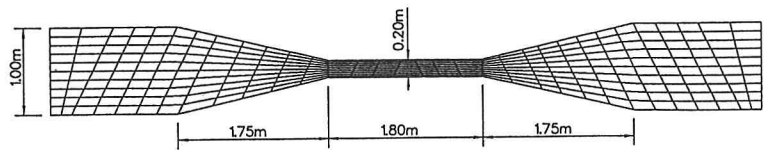


図-2 ケース2の計算座標の配置法

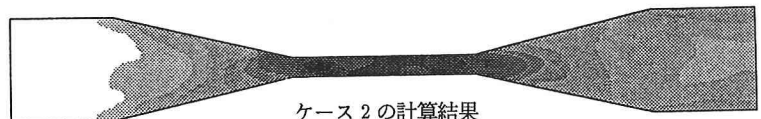
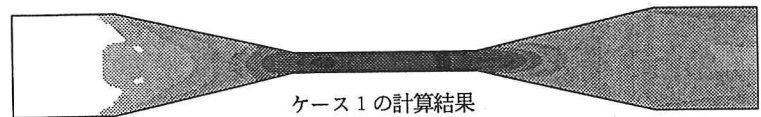
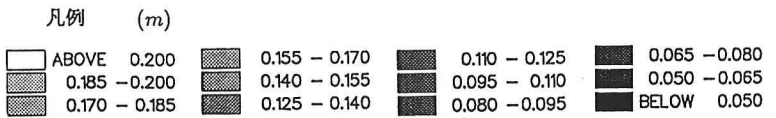


図-3 河床変動量コンター図

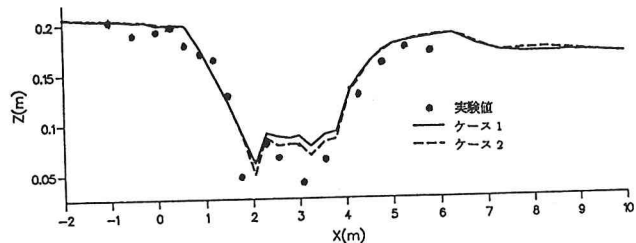


図-4 水路中心の河床縦断面図