

II-296 跳水を伴う流れの1次元河床変動計算

岐阜大学工学部 学生員 沢田良二
 岐阜大学工学部 正会員 河村三郎
 岐阜大学工学部 正会員 中谷 剛

1. はじめに 常流, 及び射流を対象とした河床変動計算は, 流砂の連続式を, 前者では後退差分, 後者では前進差分し, 水面形計算の結果から得られる流砂量を用いて行われるのが一般的である. しかし, この方法では跳水前後の点では差分が重なり合い, これらの点での河床高の決め方が明かでないことが指摘されている¹⁾. また, 山地河川流路工のような急勾配流路内の流れは常流・射流の混在する複雑な流れとなっており, 常流区間あるいは射流区間を区別することが難しい. そこで, 水面形計算では衝撃波獲得法として知られるMacCormack法を利用する. MacCormack法は, 跳水を伴うような水面形の計算にも適用が可能であるため, この計算法と流砂の連続式を組み合わせることで, 常流・射流の混在する複雑な流れ場でも差分スキームを変えることなく, 上流側から下流に向かって河床変動計算を進めることが可能になると考えられる.

2. 差分式 基礎方程式は, 流水の1次元運動方程式と連続式, および流砂の連続式である. MacCormack法は跳水のような水理学的に不連続な現象も再現することができるが, その場合物理的に意味の無い数値振動を生ずる. そのため, 人工粘性項などを導入して数値的な不安定性を制御する必要がある. ここでは, TVD形式の人工粘性を採用した²⁾. 図1にBurgers 方程式による不連続面の移動を, 1次精度のLax-Wendroff法, 2次精度のMacCormack法, MacCormack法に一般的な高次の人工粘性項を付加した場合, およびTVD形式の人工粘性項を付加した場合の数値実験の結果を示す. 1次精度のLax-Wendroff法では数値振動は見られないものの, 不連続面が鈍ってしまう. 一般的な人工粘性項を使用した場合は, 数値振動の振幅は小さくなるが, 数値振動そのものは抑えきれない. 一方, TVD形式の人工粘性項は, 僅かに不連続面が鈍るものの, 数値振動を完全に制御できることがわかる. 山地河川流路工のような急勾配流路内の流れでは, 常流, 射流が混在していると考えられるので, 今後の計算では, 安定性の高いTVD形式の人工粘性項を使用する. 制限関数(flux limiter)は何種類かが提案されているが³⁾, ここではD.M.Causon⁴⁾ と同様のものを使用した. MacCormack法は2次精度の予測子修正子法で, 差分スキームを示せば以下になる.

予測子段階:

$$\bar{U}_j = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_j^n - E_{j-1}^n) + \Delta t C_j^n \quad (1)$$

修正子段階:

$$U_j^{n+1} = \frac{\Delta t}{2\Delta x} (U_j^n + \bar{U}_j) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{E}_{j+1} - \bar{E}_j) + \frac{\Delta t}{2} \bar{C}_j^n + \text{TVD}_j \quad (2)$$

ただし,

$$\bar{E}_j = E(\bar{U}_j), \quad \bar{C}_j = C(\bar{U}_j)$$

$$U = \begin{bmatrix} A \\ Q \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} Q \\ (P/\rho)_s + (Q^2/A) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ gA(i-n^2Q|Q|/A^{2R^{4/3}}) \end{bmatrix}$$

$$\text{TVD}_j = \{G^+[r_j^+] + G^-[r_{j+1}^-]\} \Delta U_{j+1/2}^n - \{G^+[r_{j-1}^+] + G^-[r_j^-]\} \Delta U_{j-1/2}^n$$

ここに, $\Delta U_{j+1/2}^n = U_{j+1}^n - U_j^n$, $r_j^+ = 1 / r_j^- = \Delta U_{j-1/2}^n / \Delta U_{j+1/2}^n$

$$G^\pm[r_j^\pm] = \frac{|\nu|}{2} (1 - |\nu|) [1 - \phi(r_j^\pm)]$$

$$v = \{ \max (U_j + \sqrt{gh_j}) \} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \phi(r_j) = \begin{cases} \min(2r_j; 1), & r_j > 0 \\ 0, & r_j \leq 0 \end{cases}$$

ここに, Q : 流量, p : 全水圧, A : 流積, g : 重力加速度, i : 河床勾配, n : Manningの粗度係数, R : 径深, B : 水路幅, x : 上流からの距離, t : 時間, TVD: TVD形式の人工粘性項, ϕ : 制限関数, である。

流砂の連続式の差分は計算の安定性を考慮し, Delft Hydraulic Laboratory Method⁵⁾のものを採用した。

$$z_j^{n+1} = (1 - \alpha) z_j^n + \alpha (z_{j+1}^n + z_{j-1}^n) / 2 - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (Q_{b,j+1}^n - Q_{b,j-1}^n) \quad (3)$$

ここに, Z : 河床高, λ : 空隙率, α : 緩和係数, Q_b : 掃流砂量, である。

3. 計算結果 図2に, 河床変動の数値実験例を示す。河床勾配を1/100とし, 三角状のモデル河床が変化していく過程を示した。なお, 流れは全区間で常流である。流砂量公式はMeyer-Peter-Müllerの式を用い, 河床材料は粒径2mm($n=0.0148$ 相当)の一樣砂とした。この場合は $\alpha=0.005$ では計算が不安定になったので $\alpha=0.01$ で計算を行った。また, 河床変動計算の時間間隔は $\Delta t=0.5$ secとし, 1回の河床変動計算の後の水面形を $\Delta t=0.005$ sec間隔で40回繰り返すことで求めた。

4. おわりに 本研究で示した河床変動計算法では, 常流と射流を区別することなく計算を進めることができることがわかった。今後は, 床固め工や落差工などの構造物が流路工内にあるような場合の河床変動計算への適用を考えたい。

参考文献 1)道上正規, 藤田正治, 前田真吾: 非平衡浮遊砂を考慮した急勾配水路における貯水池堆砂の計算法, 水工学論文集, 第34巻, pp.367-372, 1990。

2)Harten, A.: High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, J. of Comp. Physics 49, pp.357-393, 1983. 3)Sweby, R.K.: High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 21, No. 5, pp.995-1011, 1984. 4)Causon, D.M.: High Resolution Finite Volume Schemes and Computational Aerodynamics, Nonlinear Hyperbolic Equations—Theory, Computation Methods, and Applications, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol. 24, pp.63-74, 1989. 5)Cunge, J.A., Holly Jr, F.M., and, Verwey, A.: Practical Aspects of Computational River Hydraulics, pp.287-294, 1980。

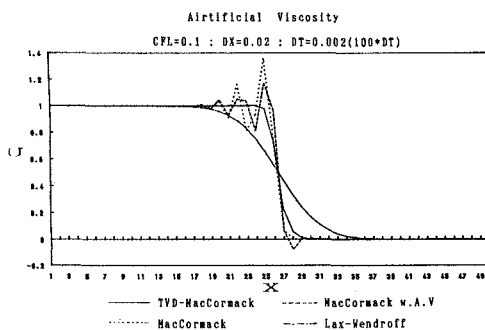


図1 人工粘性項の比較

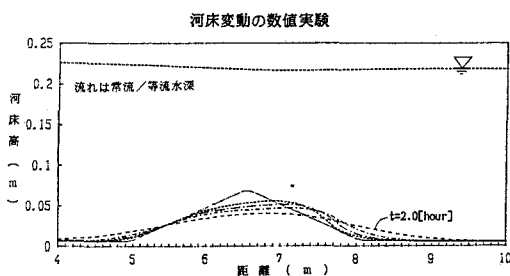


図2 三角状のモデル河床の数値実験

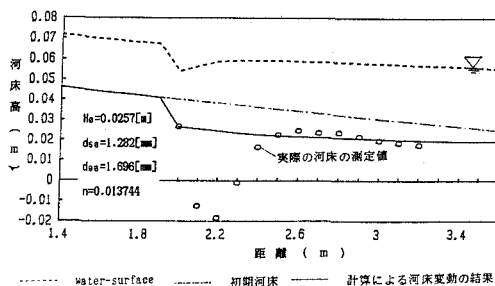


図3 常流・射流の混在する流れの河床変動の数値実験結果