

II-248

底面が横断的に傾いた水路における流速分布と底面せん断応力分布の解析

金沢工業大学 正会員 山坂昌成

1. はじめに 幅広開水路等流においては、底面せん断応力 τ_b を局所水深 h を用いて $\tau_b = \rho g h i \cdots (1)$ (ρg :水の単位体積重量、 i :エネルギー勾配または底面の縦断勾配)から算定することが多く行われ、この手法は、流路中央域については有効とされている。しかし、底面せん断力の算定が重要なのは、主として底質の移動と局所洗掘の推定のためであり、重大な局所洗掘が生じる箇所は流路中央部よりむしろ側岸近傍であることからすると、側岸近傍の底面せん断応力の精度のよい推定法の確立が望まれる。本研究は、流路の横断形状を矩形、または矩形から少しはずれて底面が横断方向に微少に傾いた台形に限定し、運動方程式、境界条件をきわめて単純化して、流速分布や底面せん断応力の分布についてどのような解析結果が得られるかを検討したものである。

2. 運動方程式と境界条件 渦動粘性係数を用いた解析において、これの横断分布を考慮した場合には等流といえども複雑な数値計算を必要とするため¹⁾、本研究では一定渦動粘性係数を仮定する。 $z_b = \alpha y$ で表される底面形状をもつ横断面内の流速 u を矩形断面での流速 u_0 からの摂動で $u = u_0 + \alpha u_1$ と表すと、 u_1 についての運動方程式、境界条件(空気との境界面を除いて、境界面のせん断応力が境界流速に比例²⁾)は、摂動展開の一次までとり、それぞれ以下ようになる(u_0 については基礎式、結果ともに文献2の u_0 に同じであるので省略する)。

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

$$z=1 \text{ で: } \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$z=0 \text{ で: } y \frac{\partial u_0}{\partial z} + u_1 = \chi_b \left(y \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \quad (4)$$

$$y=\pm 1 \text{ で: } u_1 = \mp \chi_s \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad (5)$$

ここに、 u , u_0 , u_1 は断面平均流速で無次元化された流速、 z は平均水深で無次元化された鉛直上向き座標、 y は半幅で無次元化された横断座標、 β は半幅/平均水深である。また、 χ_b 、 χ_s は平均的な摩擦抵抗係数により決定され、 $\chi_b = 1/(15\sqrt{C_f}) - 1/3$ 、 $\chi_s = \chi_b/\beta$ にて表される²⁾。

3. 解析解 境界条件式(3),(5)を満足し、流路中心($y=0$)に対して奇関数(底面形状が奇関数であるので)となる式(2)の解は、 $u_1 = B \sin(\beta r y) \cosh\{r(z-1)\}$ となるが、この式中の r は $y=\pm 1$ での境界条件から $\tan(\beta r) = -\chi_s \beta r$ を満足しさえすれば任意(これを満足する解 r は無限に存在する)であるので、一般解は

$$u_1 = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \sin(\beta r_j y) \cosh\{r_j(z-1)\} \quad (6)$$

で表される。ただし、 r_j は

$$\tan(\beta r_j) = -\chi_s \beta r_j \quad (7)$$

を満足する解である。式(6)中の係数 B_j は式(4)の境界条件を満足するように、三角関数 $\sin(\beta r_j y)$ の直交性を利用して決定することができるが、紙面の関係から積分式のみ示し、最終結果の式形については省略する。

$$B_j = \int_0^1 \left[-y \frac{\partial u_0}{\partial z} + \chi_b \left(y \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} - \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \right]_{z=0} \sin(\beta r_j y) dy / \int_0^1 \sin^2(\beta r_j y) dy$$

$$/ \{ \cosh(r_j) + \chi_b r_j \sinh(r_j) \} \quad (8)$$

鉛直平均された流速は $\bar{u} = \frac{1}{1-\alpha y} \int_{\alpha y}^1 (u_0 + \alpha u_1) dy$ をTaylor展開して、近似的に

$$\bar{u} \approx u_{00}(y) + \alpha [u_{10}(y) + \{u_{00}(y) - u_{00}(y)\} y] \quad (9)$$

から算定できる。上式の右辺には2つの添え字をもつ記号が存在するが、2番目の添え字は“a”が0から1までのzに関する積分値であることを、“o”はz=0での値であることを表す。また、底面せん断応力（底面流速に比例）は流路中心での値で無次元化して

$$\tau_b = - \frac{1}{d_1 d_2} \frac{1}{\chi_b} [u_0(y) + \alpha \left\{ \frac{u_0(y)}{\chi_b} y + u_1(y) \right\}]_{z=0} \quad (10)$$

で表される。上式中の係数 d_1 、 d_2 の詳細については文献2の中に示されている。

4. 解析例およびまとめ 図-1に鉛直平均流速(a)と底面せん断応力(b)の横断分布の解析例を示す。水力条件は、抵抗係数 $C_f=0.005$ 、 $\beta=20$ （流路幅が水深の40倍）で底面の横断傾度は $\alpha=0.2$ （平均水深からの水深変化が平均値に対して2割）とした。図中の一点鎖線は矩形断面での解析解（0次解）を、実線が底面が横断的に傾いた水路における解析解（0次+1次解）を示す。図に示した例では、式(6)の級数の項数は、なめらかな分布が得られるよう40までとっている。 $\beta=20$ と流路幅が水深に比べてきわめて広いので側壁の影響は相対的に両側壁の近傍（それぞれ側壁から流路幅の1割程度）にのみ及び、流路中央域の広い範囲にわたって、側壁の影響は無視でき、鉛直平均流速及び底面せん断応力の横断分布はほぼ直線となっている。このような側壁の影響領域の相対的な大きさは、主として幅・水深比（ 2β ）に大きく支配され、 β が小さいほど側壁の影響領域は流路中央付近にまで広がり、 β が極端に小さくなる（5以下）と中央域の直線分布は見られなくなる。また、抵抗係数 C_f が大きくなると流速、底面せん断力ともに側壁での値が小さくなるが、側壁の影響領域の広さにほとんど変化はない。図中の破線は、それぞれ、底面せん断応力に対しては式(1)の関係式から得られる無次元量を、流速の鉛直平均についてはこれと $\tau_b = \rho C_f \bar{u}$ から近似的に得られる関係式を無次元化した $\bar{u} = 1 + (h - h_0)/(2h_0) = 1 - \alpha y/2$ を示す（ h_0 は中央水深または平均水深）。底面せん断応力分布については、流路中央域で、鉛直縦断面に作用するせん断応力を無視した式(1)の結果と同じであることから、解析の精度はそれほど悪くないと考えられる。しかし、鉛直平均流速については、流路中央域では精度がよいとされてきた破線から大きくずれて流速変動が大きくなっているのが、本解析法は流速分布の推定法としては有効でないと思われる。この原因は、境界条件を“せん断力が流速に比例”としている点から生じている。一般に、“乱流ではせん断力は流速の2乗に比例する”ことを考慮すると、非線形境界条件を用いた解析が必要である。底面せん断応力の解析精度が余り悪くないのは、せん断力と流速の関係（境界条件も含む）の精度が悪くても、解くべき微分方程式(2)自体が本質的に力の釣合式を表しているからである。

今後、解析法の改良と実験による検証を行う必要がある。

図-1 鉛直平均流速と底面せん断応力分布の計算例
($C_f=0.005$, $\beta=20$, $\alpha=0.2$)

「参考文献」1)北條・清水・板倉：開水路における河床、河岸せん断力の算定法，水工学論文集，Vol.34.

2)山坂・池田・酒寄：一様湾曲流路の流れの三次元解析，土木学会論文集，No.411.