II－230

プレディクティブ制御法を用いた水質制御解析

中央大学大学院　学生員　今井　剛
前橋工業短期大学　正　員　梅津　剛
中央大学　正　員　川原睦人

1. はじめに

近年、沿岸域における自然との調和を考えた港湾構造物、リクリエーション施設等の開発計画が数多く提案されている。この様な状況下において水質汚染問題への関心は高まっており、多くの水質変化を予測する手法が提案され[1)]、水質調査もここ十数年来行われてきている[2)]。そこで本報文では、現地観測データなどの情報を用いて水質変化の状況を数値的に予測することにより、水質基準値を満たすような水質制御量の決定手法[3)]を提案し、その適応性を検討する。

2. 支配方程式

一般に物質拡散方程式は以下のように表される。

$$\dot{c} + uc_{,x} + vc_{,y} - \kappa(c_{,xx} + c_{,yy}) = r \quad (1)$$

ただし c は濃度、u, v は平均流速成分、κ は拡散係数、r は物質発生項を表す。重なり合わない S_1, S_2 からなる境界に囲まれた制御対象領域全体を V とする。S_1 境界では既知量として流入濃度 $\hat{c}$ と次節で述べる制御法より制御量 $\hat{u}$ が与えられ、S_2 境界ではフラックス q が既知量として与えられる。支配方程式に対し有限要素法により空間方向へ、クランク・ニコルソン法により時間方向へ離散化を行うことにより次の有限要素方程式が導かれる。但しここでは簡単のため物質発生項は無視する。

$$\{[M] + \frac{\Delta t}{2}([H]+[S])\}c_{n+1}$$
$$= \{[M] - \frac{\Delta t}{2}([H]+[S])\}c_n$$
$$+\{[M] - \frac{\Delta t}{2}([H]+[S])\}(\hat{c}_n - \hat{u}_n) \quad (2)$$

ここで、右辺第二項は S_1 境界で与えられる境界条件を意味し、Δt は微小時間増分、添字はステップ数を表している。

3. プレディクティブ制御法

ここで述べる制御法とは、ある時間までの流入状態量の情報が何等かの手段により得られてると仮定した場合に、その情報を用いることによって解析内部における水質状態量の時間的変化を数値的に予測し、それが水質基準値を満足するように流入状態量に対する制御量を決定する方法である。本研究ではこの方法をプレディクティブ制御法と呼ぶ。制御問題の指標となる評価関数は次式のように定めることにする。

$$J_n = \sum_{i=1}^{N}\{(c_{n+i} - c_d)^T Q (c_{n+i} - c_d)\} + u_n^T R u_n \quad (3)$$

ここで N は予測ステップ数である。(3) 式の評価関数は予測される $N\Delta t$ 時刻までの状態量と基準値 (c_d) との差の二乗和と、制御量の二乗和より成立ち Q, R はそれぞれの項に対する重み係数行列である。更に必要条件として次の停留条件を用いる。

$$\frac{\partial J_n}{\partial u_n} = 0 \quad (4)$$

状態量の予測には (2) を状態ベクトルについて解いた次式を用いる。

$$c_{n+i} = Ac_{n+i-1} + B(\hat{c}_{n+i-1} - \hat{u}_n) \quad i = 1, N \quad (5)$$

(5) 式において時刻 n から時刻 $n+N-1$ までの流入濃度の情報を用いることにより時刻 n において予測される時刻 $n+N$ の状態量は次式となる。

$$c_{n+N} = Ac_{n+N-1} + B(\hat{c}_{n+N-1} - \hat{u}_n)$$
$$= A^N c_n + A^{N-1}B\hat{c}_n + A^{N-2}B\hat{c}_{n+1} + \ldots$$
$$\ldots + AB\hat{c}_{n+N-2} + B\hat{c}_{n+N-1}$$
$$-(A^{N-1}B + A^{N-2}B + A^{N-3}B + \ldots + AB + B)\hat{u}_n \quad (6)$$

つまり (6) 式のように表される時刻 $n+1$ から $n+N$ までの予測された状態量を (3) 式に代入し、(4) 式の停留条件を適用することによりにより次式が導かれる。

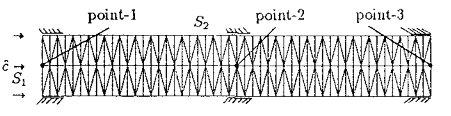
$$\{B^T QB + (AB+B)^T Q(AB+B)$$
$$+(A^2B + AB + B)^T Q(A^2B + AB + B) + \ldots$$
$$\ldots + (A^{N-1}B + A^{N-2}B + \ldots + AB + B)^T Q$$

$$(A^{N-1}B + A^{N-2}B + \ldots + AB + B) + R\}\hat{u}_n$$
$$= B^TQ(Ac_n + B\hat{c}_n)$$
$$+ (AB + B)^TQ(A^2c_n + AB\hat{c}_n + B\hat{c}_{n+1})$$
$$+ (A^2B + AB + B)^TQ$$
$$(A^3c_n + A^2B\hat{c}_n + AB\hat{c}_{n+1} + B\hat{c}_{n+2})$$
$$\vdots$$
$$+(A^{N-1}B + A^{N-2}B + \ldots + AB + B)^TQ$$
$$(A^Nc_n + A^{N-1}B\hat{c}_n + \ldots + AB\hat{c}_{n+N-2} + B\hat{c}_{n+N-1})$$
$$-\{B + (AB + B) + (A^2B + AB + B) + \ldots$$
$$\ldots + (A^{N-1}B + A^{N-2}B + \ldots + AB + B)\}^TQc_d \quad (7)$$

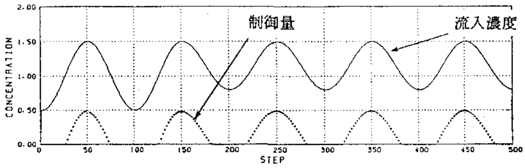
したがって制御量$\hat{u}_n$は(7)式を解くことにより逐次決定される。

4. 数値解析例

数値解析例として図-1のような矩形水路を用いて定常流れにおける水質制御解析を行った。流速は一定流速 $u = 1.0(m/s), v = 0.0(m/s)$ を与え、S_1境界において流入濃度$\hat{c}$が与えられ制御量$\hat{u}$で制御を行う。微小時間増分$\Delta t = 0.05$ 秒、拡散係数 $\kappa = 0.5(m^2/s)$、重み係数については Q は単位行列 Rは零行列とした。



図－１　有限要素分割図



図－２　流入濃度と制御量

N	1	3	5	10	25	50	75	100
$(c_{n+i} - c_d)^2$	1.000	0.996	0.993	0.990	1.016	1.140	1.244	1.256
u_n^2	1.000	0.975	0.949	0.873	0.659	0.400	0.268	0.230

表－１　予測回数と濃度，制御量の比較

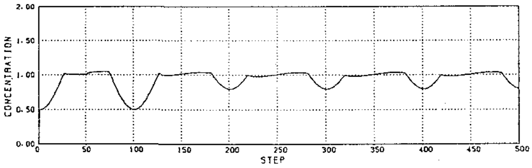
表-1は予測ステップ数 $N = 1$ を基準とした評価関数のそれぞれの値である。図-2～5は、予測回数 $N = 5$ における解析結果であり、図-2は流入濃度と制御量の関係を示し、図-3,4,5,は観測点 point1,2,3 における濃度変化の時系列である。

5. おわりに

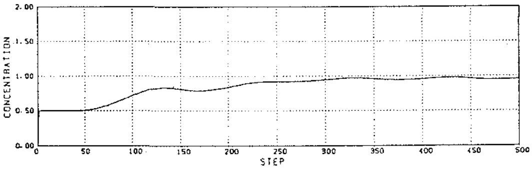
水質制御問題の数値解析手法として、内部状態量と流入状態量（外力）より制御量を決定するプレディクティブ制御法を提案し、その適用例として矩形一次元水路モデルにおける水質汚染の制御解析を行った。この結果より本手法が水質制御問題に対して有効であることが確認できた。また制御量は状態量の予測時間に大きく依存していることがわかった。今後は流入量についての予測方法や、評価関数の重み係数、予測時間などの制御量に及ぼす影響の検討を重ね、さらに非定常流れ場における制御解析も行っていく考えである。

参考文献

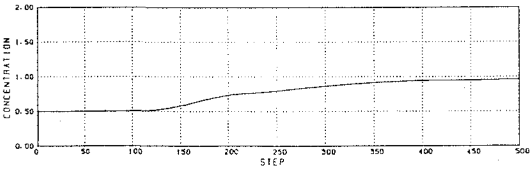
1. 例えば　川原睦人　"有限要素法流体解析"，日科技連出版社
2. 自然環境についての標本調査法の研究"統計数理研究所共同研究リポート16"，統計数理研究所,1989.
3. 梅津，川原，"洪水問題に対する予測制御解析"，第4回数値流体力学シンポジウム



図－３　濃度 (point-1)



図－４　濃度 (point-2)



図－５　濃度 (point-3)