II-209　日野の重ね合わせの原理による開放境界スキーム

佐藤工業　正員　久連山秀樹
北海道大学工学部　正員　浜中建一郎

１．はじめに　長波の数値解析に於ける開放境界のスキームは種々提案されているが、日野[1]、日野・仲座[2]はSmith[3]の重ね合わせの原理を一時間ステップ毎に境界近傍に適用し、瞬時に通過波を求める方法を提案し、その簡易法として仮想固体壁による完全反射の1/2を通過波の水位とする方法の計算スキームを提案した。著者等[4],[5]は、この簡易法について、誤差評価と、その誤差によって生ずる反射波の反射率を調べ、一般的には未知である開放境界に対する波の入射角に強く依存し、しかも、場合によっては無視し得ない大きさになることを示した。

本研究では、日野・仲座の本来の原理である、二種の反射条件のもとで求めた結果を瞬時に重ね合わせて反射波を消す方法をLeap-flogに適用し、具体的な計算スキームを提案し、その誤差評価、及び反射率を調べることを目的とする。

２．leap-frog法に対する開放境界スキーム　前節で述べた二つの反射条件とは、具体的には、開放境界上で水位を零とするものと、流量を零とするものとである。しかしながら、leap-frog法では水位と流量を時間ステップ上で交互に求め、又空間メッシュ上では水位と流量の計算点がちどりに配置されているため、二つの反射条件を同一時刻、同一地点に適用することは出来ない。このことを考慮して本研究では、水位の重ね合わせによるものと、流量の重ね合わせによるものとの二つスキームを以下に於いて提案する。

２．１　水位の重ね合わせ法　計算領域内部での連続式と、開放境界近傍の運動方程式は線形化し、

$$\eta^{n}_{i,j}=\frac{\Delta t}{\Delta s}(M^{n}_{i-1,j}-M^{n}_{i+1,j}+N^{n}_{i,j-1}-N^{n}_{i,j+1})+\eta^{n-1}_{i,j},\quad M^{n+1}_{i,j}=\frac{1}{2}gh\frac{\Delta t}{\Delta s}(\eta^{n}_{i-1,j}-\eta^{n}_{i+1,j})+M^{n-1}_{i,j} \qquad (1)$$

ここで、ηは水位、M、Nはx、y方向の流量、i、j、nはx、y、t方向のステップを表す。

Nに関しても同様である。開放境界近傍のメッシュを図１に示す。横軸はx、縦軸はt、矢印は流量、丸印は水位である。今n-1時点までの通過波の変量が求まっているとする。以下、添字i、j、nが自明の場合は省略しながら計算手順を述べる。

1) C点で$\eta=0$となるよう$\eta_{i+2}=-\eta_i$として求めたB点のMを用いてA点の水位$\eta 1$を求める。2) B点でM=0として求めたA点の水位を$\eta 2$とする。3) A点の通過波の水位は$\eta=(\eta 1+\eta 2)/2$。4) D点のNは(1)の第２式より求める。5) B点の通過波のMはD点を中心にした(1)の第１式から求める。以上を繰り返す。

２．２　流量の重ね合わせ法　前節と同様図１を基にして計算手順を以下に述べる。但し水位と流量を入れ換えて考える。

1) C点でM=0となるようMi+2=-Miとして求めたB点のηを用いてA点の流量M1を求める。2) B点で$\eta=0$として求めたA点の流量をM2とする。3) A点の通過波の流量はM=(M1+M2)/2。4) D点を中心にした(1)の第２式を用いてB点の通過波のηを求める。5) B点のηからE点のNを(1)の第２式より求める。以上を繰り返す。

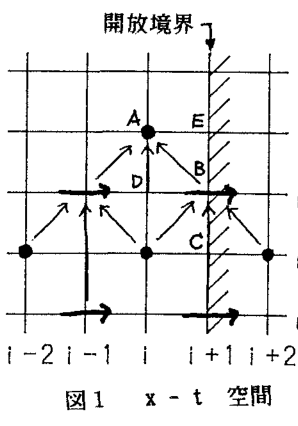

図１　x － t　空間

３．開放境界の誤差とそれによる反射率　この節では長波近似解を用いて前節で述べた開放境界スキームの誤差とそれによる反射波の反射率について述べる。通過波は以下の様に表される。

$$\eta=\sin(lx+my-\omega t),\quad M=c\frac{l}{k}\eta,\quad N=c\frac{m}{k}\eta \qquad (2)$$

ここでk=(l,m)波数ベクトル、ωは角周波数、$c=\sqrt{gh}$は波速である。

(2)式は(1)式を２次のオーダで厳密に満足する。そのことを利用して２．１節の手順をまとめると図１のＡ点の水位の推定値は

$$\tilde{\eta}^{n+1}_{i,j} = \frac{\eta 1+\eta 2}{2} = \eta^{n+1}_{i,j} + \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta s}\{ M^{n}_{i+1,j} - \frac{1}{2}\, gh\, \frac{\Delta t}{\Delta s}(\eta^{n-1}_{i+2,j} + \eta^{n-1}_{i,j})\} \qquad (3)$$

ここで記号～は差分スキームによる推定値を表す。(3)の第３式の第２項目は推定誤差Ｅとなる。このＥに(2)式を代入し、(i+1,j,n-1)の回りで２次オーダまでTaylor展開してまとめると、

$E = A\sin\theta + B\cos\theta$，但し $\theta = 1(i+1)\Delta s + mj\Delta s + \omega(n-1)\Delta t$，$\beta/c = \Delta s/\Delta t$，$\gamma = \omega\Delta t$

$$A = \frac{\beta}{2}\left[\frac{1}{k}(1-\gamma^{2}/2) - \beta\{1-\frac{1}{2}(\frac{1\gamma}{k\beta})^{2}\}\right] \quad , \quad B = \frac{\beta}{2}\frac{1}{k}\gamma \qquad (4)$$

今上式による誤差が定常的な反射波を形成したとすると、それ自身による誤差Ｅrは反射率をＲとして、$Er = RA'\sin\theta' + RB'\cos\theta'$、$\theta' = \theta + \sigma$となり、全ての$\theta$で$E + Er = 0$となるには、

$R = \sqrt{\{(A^{2}+B^{2})/(A'^{2}+B'^{2})\}}$となる。但し、Ａ′、Ｂ′は(4)式で1=-1とおいたものである。２．２の場合も同様に誤差と反射率が求まる。

４．結果および考察　　図３、４は前節で求めた二つの方法による誤差の振幅と反射波の反射率であり、図５は簡易法の中の最適なものにたいするそれである。今回の方法は簡易法に比べ良く改善されている。又、水位の重ね合わせ法は流量のそれに比べ入射角の守備範囲は広いが直角入射に対する精度が悪い。

参　考　文　献

1) 日野 幹雄、仲座 栄三 (1987)：開放境界における波の無反射透過条件の極めて簡単な計算スキームの提案、東工大　土木工学科研究報告　No.38, 31-38. 2) 日野 幹雄 (1988)：数値波動解析における新しい無反射境界スキームの平面二次元問題への適用，第35回海岸工学講演会論文集，262-266.3) Smith,W. D.(1974)：A nonreflecting plane boundary for wave propagation ploblems,J.Comp.Phys,15,492-503. 4) 寺島 貴志、古屋 温美、浜中 建一郎 (1990)：長波の数値解析における開放境界スキームの誤差について、土木学会第45回年次学術講演会　5) 浜中 建一郎 (1990)：開放境界からの反射率と誤差の伝播について、土木学会第45回年次学術講演会

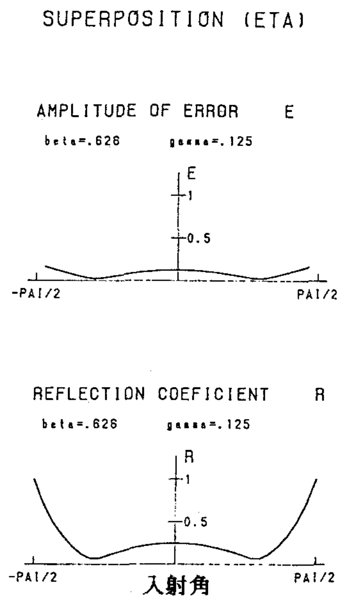

図２　誤差と反射率

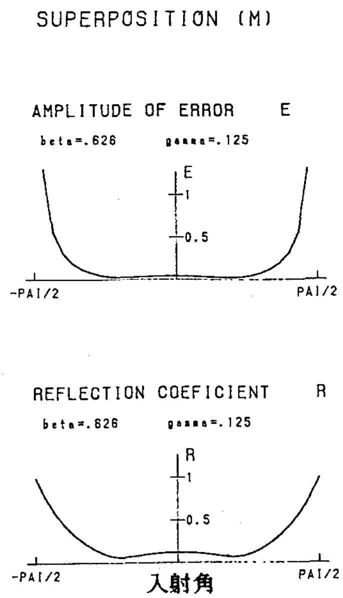

図３　誤差と反射率

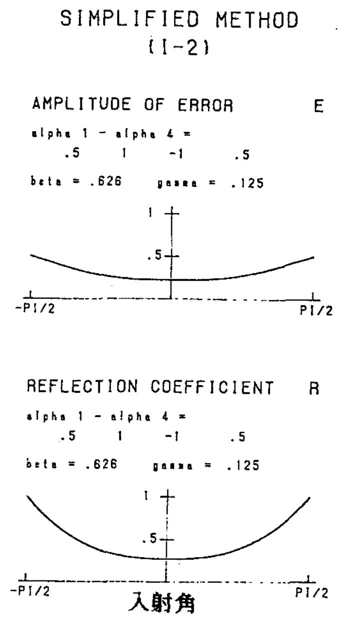

図４　誤差と反射率