II-207　２次元キャビティ内の自然対流有限要素解析

中央大学　学生員　畑中　勝守
中央大学　正　員　川原　睦人

1. はじめに

非圧縮粘性流体の流れ解析は、多くの工学分野において非常に重要かつ基本的な課題の一つである。本研究の目的は、非定常非圧縮粘性流体の熱連成問題を有限要素法を用いて数値解析するための数値解析コードを確立することにある。

一般に、NS方程式は移流項の非線形性が強く、数値解析を行う上でいかに安定に高精度で計算を進めるかが重要となってくる。しかし、安定性と精度を追求するあまりスキームが複雑になりすぎることは避けられねばならず、また計算時間や計算機容量も少なくできることが望ましい。以上の点をふまえて、本報告では、空間方向の離散化に有限要素法を、時間方向の離散化には本研究で提案する新しい分離型法を用いて定式化し、比較的安定で計算時間も少ない準陽的スキームを用いて自然対流の数値解析を行ったものを報告する。

2. 支配方程式

本研究で取り扱う流れは層流であるとし、取り扱う流体は非圧縮粘性流体であると仮定して、次のBoussinesq近似されたNavier-Stokes方程式と連続式を支配方程式として採用する。また、温度場を支配する方程式として次の熱拡散方程式を用いる。なお、各変数は適当に無次元化されているものとする。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} + p_i + Pr(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} - PrRaTf_i = 0 \tag{1}$$

$$u_{i,i} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j T_{,j} - T_{,jj} = 0 \tag{3}$$

ここに u_i は速度場、T は温度場、p は圧力場である。また、Pr, Ra はそれぞれプラントル数、レイリー数である。

3. 基礎方程式の定式化

本解析では、支配方程式に対する時間方向の離散化を以下のように行う。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n + p_{,i}^{n+1} - Pr(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} - PrRaT^n f_i = 0 \tag{4}$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + u_j^n T_{,j}^n - T_{,jj}^n = 0 \tag{6}$$

また、このときの境界条件は

$$u_i^{n+1} = \hat{u}_i \tag{7}$$

$$\{-p^{n+1}\delta_{ij} + Pr(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)\} \cdot n_j = \hat{\sigma}_{ij} \tag{8}$$

$$T^{n+1} = \hat{T} \tag{9}$$

$$T^{n+1} \cdot n_i = \hat{q}_i \tag{10}$$

である。次に本報告で提案する新しい分離解法について説明する。

まず、(4)式の両辺の発散をとり、(5)式を代入して、次の圧力のポアソン方程式を導く。

$$p_{,ii}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} u_{i,i}^n - u_{j,i}^n u_{i,j}^n - u_j^n u_{i,ij}^n + Pr(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,ij} + PrRa(T^n f_i)_{,i} \tag{11}$$

次に、先の式より得られる p^{n+1} を(4)式に代入し、速度場 u_i^{n+1} を求める。また、熱の拡散方程式は(6)式によって求められる。

さて、本手法の特徴は次の弱形式化にある。前述の(4)，(6)，(11)式に有限要素法を適用し、空間方向の離散化を行う。重み関数をそれぞれ p^*，u_i^*，T^* とし、解析領域 V で積分し、それぞれの重み付き残差方程式を誘導する。ここで、(11)式の重み付き残差方程式は

$$\int_V p^* p_{,ii}^{n+1} dV = \frac{1}{\Delta t}\int_V p^* u_{i,i}^n dV - \int_V p^* u_{j,i}^n u_{i,j}^n dV - \int_V p^* u_j^n u_{i,ij}^n dV + Pr\int_V p^*(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,ij} dV + PrRa\int_V p^*(T^n f_i)_{,i} dV \tag{12}$$

さて、(12)式の左辺を部分積分すると、

$$\int_V p^* p_{,ii}^{n+1} dV = \int_S p^* p_{,i}^{n+1} n_i dS - \int_V p_{,i}^* p_{,i}^{n+1} dV \tag{13}$$

ここで、(13)式の右辺第一項内の圧力のノーマル方向微分を(4)式から求めることを考える。すなわち、

$$p_{,i}^{n+1} \cdot n_i = -\{\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n$$

$$+Pr(u^n_{i,j}+u^n_{j,i})_{,j}+PrRaT^nf_i\}\cdot n_i \tag{14}$$

これを (13) 式へ代入し、さらに (12) 式の左辺に代入し、また (12) 式の右辺第一項と第二項を除く全ての項に部分積分を施す。このとき、右辺の粘性項は２階微分の微小項であるからこれを省略し整理すると次の式が得られる。

$$\int_V p^*_{,i}p^{n+1}_{,i}dV=-\frac{1}{\Delta t}\int_V p^*u^n_{i,i}dV-\int_V p^*_{,i}u^n_ju^n_{i,j}dV$$

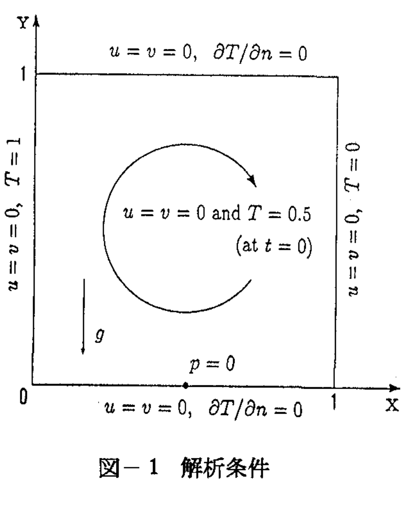
$$+PrRa\int_V p^*_{,i}(T^nf_i)dv-\int_S p^*\left(\frac{u^{n+1}_i-u^n_i}{\Delta t}\right)\cdot n_idS \tag{15}$$

これにより、圧力のポアソン方程式に関する第二種境界条件は (15) 式右辺第四項の形で与えられ、取扱い易い形となる。

最終的には、それぞれの重み付き残差方程式から有限要素方程式を導き、この代数方程式からプログラムを作成し、数値解析を行って行くわけであるが、有限要素方程式は本報告では割愛する。

4. 数値計算例

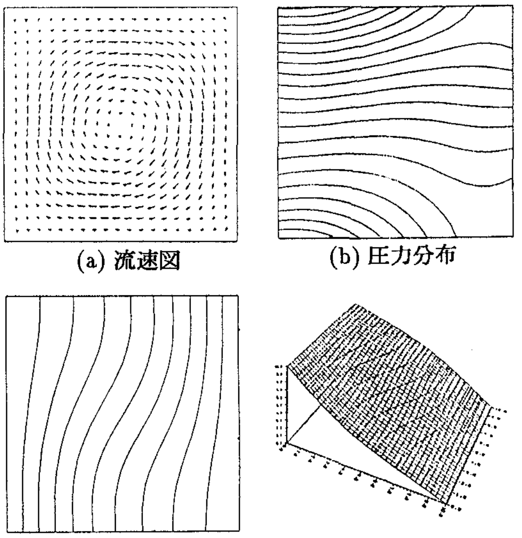
数値解析例として２次元の正方形キャビティ内の自然対流の解析を行った。初期条件、境界条件を図－１に示す。計算に使用した有限要素は、等間隔の四角形双一次アイソパラメトリック要素であり、分割数は 20*20 である。プラントル数を 0.71 とし、レイリー数を $10^3, 10^5$ とした２ケースの解析を行った。計算結果は他の解析手法によるものと非常に良く一致している (図－２～３)。なお、全ての計算において、離散化に伴う絶対誤差を軽減するため Gresho らが提唱している BTD (balancing tensor diffusivity) の項を基礎方程式の (4), (6) 式中に追加して計算を行っている。



図－１ 解析条件

5. おわりに

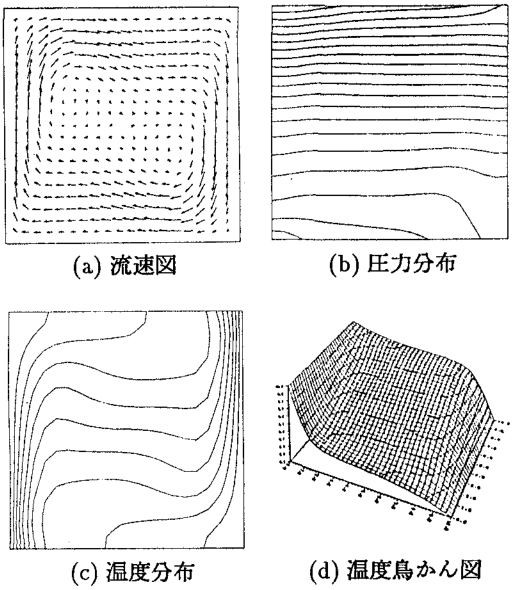
分離型法を用いて非定常非圧縮粘性流体の熱対流解析を行った。解析結果から有限要素法と新しい分離型法の組合せによる定式化は有効であったと考えられる。また、本手法は有限要素法の特徴である第二種境界条件の取り扱いの容易さを利用した手法であるため、プログラム作成が非常に容易であり、この利点は３次元問題への拡張も容易にするものである。



(a) 流速図　(b) 圧力分布

(c) 温度分布　(d) 温度鳥かん図

図－２ 計算結果 ($Pr=0.71, Ra=10^3$)



(a) 流速図　(b) 圧力分布

(c) 温度分布　(d) 温度鳥かん図

図－３ 計算結果 ($Pr=0.71, Ra=10^5$)