II-200

有限要素法による浅水波の解析

中央大学　学生員　鄭　榮裕
中央大学　正　員　川原睦人

1．はじめに

有限振幅の波動伝播解析を行う場合、一般に非線形の浅水長波方程式が用いられ、有限要素法などの数値解析手法によって計算が行われる。しかし、波長が短くなるにつれて波頂曲率の効果を考慮しなければならない。そこで、本研究では、有限要素法によって波頂曲率まで考慮したＢｏｕｓｓｉｎｅｓｑ方程式を解析する手法について検討を行う。本手法は、空間方向に対して一次の三角形要素に基づく有限要素法で離散化を行い、時間方向に対しては、Ｂｏｕｓｓｉｎｅｓｑ方程式に対し準陽的オイラー法を、連続方程式に対しては陽的オイラー法を用いることによって計算を進めるものである。ここでは、本手法の計算手順および検討のために行った一次元の水路モデルにおける波動伝播解析の結果を示す。

2．基礎方程式

基礎方程式としてＢｏｕｓｓｉｎｅｓｑ方程式を用いるものとする。運動方程式と連続方程式は、以下のように書き表すことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial t}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y\partial t}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{(h+\eta)u\}+\frac{\partial}{\partial y}\{(h+\eta)v\}=0 \tag{3}$$

ここに、u、vは流速、ηは水位変動量、hは水深、gは重力加速度である。式(1),(2)の右辺は圧力に対する補正項すなわち波頂曲率に関する項である。

3．有限要素法の適用

基礎方程式(1),(2),(3)について、有限要素法による空間方向の離散化を行う。通常のガレルキン法に従って、重み付き残差方程式の誘導を行う、三角形一次要素を用いて離散化を行えば、以下のような有限要素方程式が導かれる。

$$M_{\alpha\beta}\dot{u}_\beta+\frac{h^2}{3}(K_{\alpha x\beta x}\dot{u}_{\beta x}+G_{\alpha x\beta y}\dot{u}_{\beta y})+L_{\alpha\beta\gamma x}u_\beta u_{\gamma x}+I_{\alpha\beta\gamma y}v_\beta u_{\gamma y}+gA_{\alpha\beta x}\eta_{\beta x}=0 \tag{4}$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{v}_\beta+\frac{h^2}{3}(P_{\alpha y\beta y}\dot{v}_{\beta y}+Q_{\alpha y\beta x}\dot{v}_{\beta x})+L_{\alpha\beta\gamma x}u_\beta v_{\gamma x}+I_{\alpha\beta\gamma y}v_\beta v_{\gamma y}+gZ_{\alpha\beta y}\eta_{\beta y}=0 \tag{5}$$

$$M_{\alpha\beta}\dot{\eta}_\beta+N_{\alpha\beta x\gamma}H_{\beta x}u_\gamma+L_{\alpha\beta\gamma x}H_\beta u_{\gamma x}+I_{\alpha\beta\gamma y}H_\beta v_{\gamma y}+J_{\alpha\beta y\gamma}H_{\beta y}v_\gamma=0 \tag{6}$$

時間方向の離散化として、$\dot{u}=\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t}$ と考えれば、式(4),(5),(6)は以下のようになる。

$$[M_{\alpha\beta}+\frac{h^2}{3}(K_{\alpha x\beta x}+G_{\alpha x\beta y})]u^{n+1}=[M_{\alpha\beta}+\frac{h^2}{3}(K_{\alpha x\beta x}+G_{\alpha x\beta y})]u^n-\Delta tL_{\alpha\beta\gamma x}u^nu^n-\Delta tI_{\alpha\beta\gamma y}v^nu^n-\Delta tgA_{\alpha\beta x}\eta_n \tag{7}$$

$$[M_{\alpha\beta}+\frac{h^2}{3}(P_{\alpha y\beta y}+Q_{\alpha y\beta x})]v^{n+1}=[M_{\alpha\beta}+\frac{h^2}{3}(P_{\alpha y\beta y}+Q_{\alpha y\beta x})]v^n-\Delta tL_{\alpha\beta\gamma x}u^nv^n-\Delta tI_{\alpha\beta\gamma y}v^nv^n-\Delta tgZ_{\alpha\beta y}\eta_n \tag{8}$$

$$M_{\alpha\beta}\eta_{n+1}=M_{\alpha\beta}\eta_n-\Delta tN_{\alpha\beta x\gamma}H^nu^n-\Delta tL_{\alpha\beta\gamma x}H^nu^n-\Delta tI_{\alpha\beta\gamma y}H^nv^n-\Delta tJ_{\alpha\beta y\gamma}H^nv^n \tag{9}$$

ここで、添字 n は、各々の時間ステップを表している。式 (9) はこのままでは解が不安定となり、答を得ない。従って、式 (9) に対しては、陽的スキームを適用するものとする。集中化行列と混合行列を用いれば、以下のようになる。

$$\bar{M}_{\alpha\beta}\eta_{n+1} = \tilde{M}_{\alpha\beta}\eta_n - \Delta t N_{\alpha\beta x\gamma} H^n u^n - \Delta t L_{\alpha\beta\gamma x} H^n u^n - \Delta t I_{\alpha\beta\gamma y} H^n v^n - \Delta t J_{\alpha\beta y\gamma} H^n v^n \tag{10}$$

$\bar{M}$ は集中化質量行列を表す。また、$\tilde{M}$ は混合行列である。

$$\tilde{M} = e\bar{M} + (1-e)M \tag{11}$$

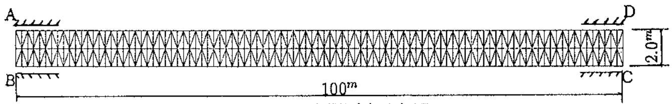
ここに、e はランピングパラメーターと呼ばれ、陽的解法を用いる場合の人工粘性による誤差を緩和するものである。

４．数値解析例

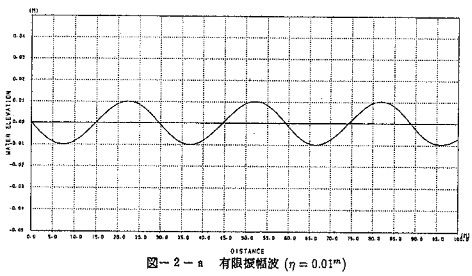
数値計算例として、一次元の水路モデルを用い 波動の伝播解析を行う。有限要素分割を図－１に示す。水深は 1.0m で一定とする。境界条件は、境界 AD 、 BC で法線方向の流速を零とする。また境界 CD では進行波の条件により透過条件を与える。境界 AB で周期 10 秒の正弦波を与える。振幅については 0.01m 、0.40m の２ケースの場合について計算を行う。Ｂｏｕｓｓｉｎｅｓｑ方程式を解析した結果を図－３に示す。また、参考のため非線形方程式（有限振幅波）の場合の結果を図－２に示す。計算結果よりＢｏｕｓｓｉｎｅｓｑ方程式では、非線形方程式の場合と比べて、波長を短くするにつれて波頂曲率の影響が顕著になることがわかった。

５．おわりに

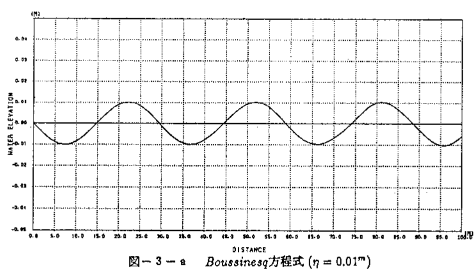
有限要素法によりＢｏｕｓｓｉｎｅｓｑ方程式を解析する方法を示した。検証として行った一次元の水路モデルの波動伝播解析により本手法の妥当性を確認した。



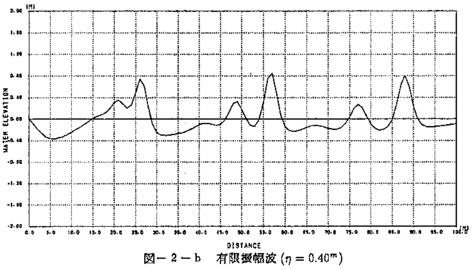
図－１　有限要素分割図



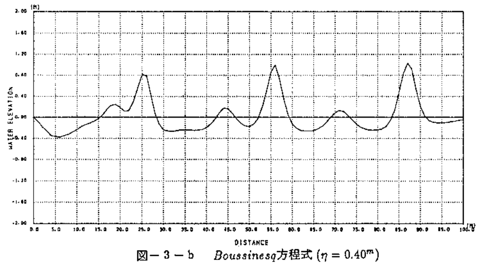
図－２－a　有限振幅波 ($\eta = 0.01^m$)



図－３－a　*Boussinesq*方程式 ($\eta = 0.01^m$)



図－２－b　有限振幅波 ($\eta = 0.40^m$)



図－３－b　*Boussinesq*方程式 ($\eta = 0.40^m$)