II-199　重み付差分法の潮流解析への応用

九州産業大学　正員　加納正道
九州産業大学　正員　赤坂順三
東　和　大学　正員　空閑幸雄

１．まえがき　閉鎖性海域における、富栄養化問題及びウォータフロント開発による水質や潮流の影響評価を検討するために潮流や移流拡散を精度良く解析することが望まれている。そこで本報では、移流拡散および浸透流方程式を精度良く解くことのできた重み付差分法[1]により潮流解析を行うこととし、二次元潮流方程式および連続の式の重み付差分法の定め方を示している。

２．基礎方程式　基礎方程式として三次元のレイノルズ方程式を海底から水面まで積分して鉛直方向の平均値として表示した二次元の運動方程式（１）、（２）および連続の式（３）を基礎式とする。

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{M}{h+\zeta}\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{N}{h+\zeta}\frac{\partial M}{\partial y}=-g\,(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\delta\frac{\rho_a}{\rho_w}\gamma_s^2\,W_x\sqrt{W_x^2+W_y^2}$$
$$-\frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2}M\sqrt{M^2+N^2}+fN+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{M}{h+\zeta}\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{N}{h+\zeta}\frac{\partial N}{\partial y}=-g\,(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\delta\frac{\rho_a}{\rho_w}\gamma_s^2\,W_y\sqrt{W_x^2+W_y^2}$$
$$-\frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2}N\sqrt{M^2+N^2}-fM+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right) \tag{2}$$

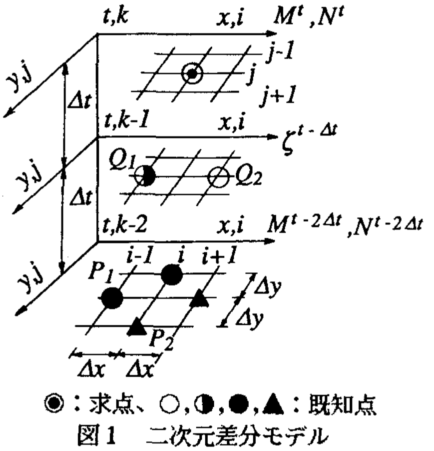
$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=0 \tag{3}$$

ここに、$M=U\,(h+\zeta)$，$N=V\,(h+\zeta)$ はおのおのｘ，ｙ方向の線流量、Ｕ，Ｖはそれぞれｘ，ｙ方向の平均流速、ζは水面の平均水面からの高さ、W_x, W_y はｘ，ｙ方向の風速成分、ｇは重力の加速度、ｆはコリオリの係数、εは水平方向の渦動粘性係数、ρ_a, ρ_w は空気および水の密度、$\delta=1\sim1.5$の補正係数、γ_b, γ_s は水底、水面における摩擦係数である。

３．重み付差分法の定め方　まず、二次元運動方程式（１）を解析するための重み付差分法の求め方とその用い方を以下に述べよう。いま基礎式（１）において式（４）、（５）

$$\frac{M}{h+\zeta}=m,\quad \frac{N}{h+\zeta}=n,\quad -g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}=F_L \tag{4}$$

$$\delta\frac{\rho_a}{\rho_w}\gamma_s^2\,W_x\sqrt{W_x^2+W_y^2}-\frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2}\,M\sqrt{M^2+N^2}+f\,N=G \tag{5}$$



◉：求点、○,◑,●,▲：既知点
図１　二次元差分モデル

$$\frac{\partial M}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+m\frac{\partial M}{\partial x}+n\frac{\partial M}{\partial y}=F_L+G \tag{6}$$

$$M(x_0,y_0,t_0)=P_1M(x_1,y_1,t_1)+P_2M(x_2,y_2,t_2)+\cdots\cdots+P_nM(x_n,y_n,t_n) \tag{7}$$

のように表わし、式（１）を式（６）と書き直す。まず、$(F_L+G)=0$とした同次形の方程式について、考える点◎(x_0, y_0, t_0)の関数値をその近接点①～⑪$(x_1, y_1, t_1 \cdots x_n, y_n, t_n)$の重み付加算値と考えて式（７）あるいは式（８）と記す。（ｉ点の重みをP_iとする）次に、非同次項を含めた式（１）に近似な重み付差分法を定めるために、式（７）に既知である非同次項(F_L+G)による項を付け加えて式（９）とする。

式（９）を決定するために、まず式(６)の同次形の式を満たす重み付差分法を次の様にして求める。即ち、同次形の式を満たすｘ，ｙ，ｔの多項式は式（１０）で表わされるから、式（７）で例えば図１の近接点４個を用い、この４個２種類の重みを定めるように式(１０）において、ｒ＝０，２とおいて得られるＭの値を採用すれば連立方程式（１１）が得られ、これを解けばＰ$_i$の値が定まる。

$$M(0)=\sum_{i=1}^{n} P_i\cdot M(i) \tag{8}$$

$$M(0)=\sum_{i=1}^{n} P_i\cdot M(i)+\sum_{j=1}^{m} Q_j\cdot F_L(j)+G \tag{9}$$

$$M^r(x,y,t)=\sum_{i=0}^{r/2}\left\{\frac{(x-mt+y-nt)^{r-2i}}{r-2i}\cdot\frac{(2\varepsilon t)^i}{i!}\right\} \tag{10}$$

$$(F_*=F_x+F_y,\ F_x=\frac{m\Delta t}{\Delta x},F_y=\frac{n\Delta t}{\Delta y}),(\mu_*=\mu_x+\mu_y,\ \mu_x=\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2},\ \mu_x=\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta x^2},\mu_y=\frac{\varepsilon\Delta t}{\Delta y^2})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2\left[(1-2F_*)^2/2-4\mu_*\right] & 2\left[(1+2F_*)^2/2-4\mu_*\right]\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\F_*-4\mu_*\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} M_L&=\frac{(L-2)!}{\varepsilon}\sum_{i=0}^{L/2}\left\{\frac{(x-mt+y-nt)^{r-2i}}{(L-2i)!}\cdot\frac{(\varepsilon t)^i}{i!}\right\}\\ F_L&=-(L-2)!\sum_{i=0}^{L/2-1}\left\{\frac{(x-mt+y-nt)^{L-2-2i}}{(L-2-2i)!}\cdot\frac{(\varepsilon t)^i}{i!}\right\}\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$M(0)=\sum_{i=1}^{n} P_i\cdot M_L(i)+\sum_{j=1}^{m} Q_j\cdot F_L(j)+G \tag{13}$$

$$\begin{aligned} M(i,j,k)=P_1\{M(i-1,j,k-2)+M(i,j-1,k-2)\}+P_2\{M(i+1,j,k-2)+M(i,j+1,k-2)\}\\ +Q_1\cdot f(i-1,j,k-1)+Q_2\cdot f(i+1,j,k-1)+G\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} 2\{(-1+2F_*)^2/2-\mu_*\} & 2\{(1+2F_*)^2/2-\mu_*\} \\ 2\{2(-1+2F_*)^4/4! & 2\{2(1+2F_*)^4/4! \\ -(-1+2F_*)^2\mu_*+\mu_*^2\} & -(1+2F_*)^2\mu_*+\mu_*^2\}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}=\frac{h^2}{\varepsilon}\begin{bmatrix}2 & 2\\ -(-1+F_*)^2+2\mu_* & -(1+F_*)^2+2\mu_*\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{2}{\Delta t}(\zeta^{t-\Delta t/2}-\zeta^t) \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial x}&=\frac{2}{\Delta x}(M_{i+1}^{t-\Delta t}-M_{i-1}^{t-\Delta t})\\ \frac{\partial N}{\partial y}&=\frac{2}{\Delta y}(N_{j+1}^{t-\Delta t}-N_{j-1}^{t-\Delta t})\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

次にＰ$_i$が決まった上でさらに格子点ｊの組の係数Ｑ$_j$を、式（１３）が式（６）を満たす様に定める。（なお、Ｇ＝０である）　いま与えられた微分方程式（６）の右辺を次々にある既知関数Ｆ$_L$（Ｌ＝１，２，・・・Ｍ）でおきかえて得られる微分方程式の特解の一つをそれぞれＭ$_L$とすれば、これらの関数はそれぞれ式（１３）の関係を満たしている。そこで、式（６）を満たすＦ$_L$とＭ$_L$、の組み合わせを求めれば式（１２）を得る。この様にして求めたＦ$_L$とＭ$_L$の組み合わせを同次方程式におけると同様に離散化をほどこし、図１に示すように、６点４種類の近接点で差分モデルを考えて、式（１４）の重み付差分式を得る。次に、原点を考える点に移し、式（１２）において得られた（Ｆ$_2$,Ｍ$_2$），（Ｆ$_4$,Ｍ$_4$）のＦとＭの組みの値および式（６）の同次形を満たすように求めたＰ$_1$，Ｐ$_2$の値を式（１４）に代入すれば、連立方程式（１５）が求まる。これを解いて重みＱ$_1$,Ｑ$_2$ が定まる。

なお、連続の式（３）については、時間微分項にはＣｒａｎｋ－Ｎｉｃｈｏｌｓｏｎ型差分を用いて式（１６）となる。一方左辺第２、３項はそれぞれ陽形式中央差分を用いて式（１７）と表示される。

参考文献

１）加納・赤坂・空閑：塩水くさびの淡塩境界面における移流拡散の重み付差分法解析、第43回年講2部