II-52

河川のハックの法則とフラクタル

東京都土木技術研究所　正会員　小 川　進

1.はじめに

河川地形則の１つにHackの法則がある(Fig.1).主河道長と流域面積の関係を次式で表わしたものである[1].

$$L = aA^{b} \tag{1}$$

ここで，L：河川の主河道長，A：流域面積，a，b：定数である．

Mandelbrotは，自己相似性を有する不規則図形をフラクタル(fractal)と定義し，河川線形がフラクタルであり，主河道のフラクタル次元Dに対し，Hackの法則の指数b＝D／２であることを示した[2].

さらに，フラクタル次元Dは分岐比αと縮小比１／β（α，β＞１)とから定義され，Hortonの第１及び第２法則[3]の分岐比と流長比(縮小比)との関係から水路網に関する次式が導出される[4].

$$D = \log\alpha / \log\beta \tag{2}$$

この考え方は統計的自己相似性にまで拡張され，被覆法[5]で知られる次の同次元の定義式が導出される．

$$N = \mathrm{const.} \times r^{-D} \tag{3}$$

ここで，N：被覆した図形の数，r：被覆した図形の単位長さである(Fig.2).

2.フラクタル次元解析

地形図の多摩川の主河道と全河道に対して，フラクタル次元解析を試みた．(3)式で回帰した結果を Fig.3に示す．主河道も全河道もいずれもフラクタルであり，それぞれ同次元は，1.03,1.45であることがグラフの勾配よりわかる．図において，rが小さいときに勾配がD＝1.0に相当する変化を示している．次に，多摩川の支流である秋川について，地形図のスケールを変えてみると，縮尺が2,500分の1においてr＝20mm(実尺50m)で同様の変化が表われた．この区間の蛇行(meander)の最小波長は40mm(実尺100m)であるから，ほぼ半波長の測度でD＝1.0に変化していることがわかる．このとき，L＝N・rが成立つ．

3.フラクタルによる定式化

主河道Xの最大距離d(X)とし，Fig.2に示すように次式で定義する．

$$d(X) = \sup\{d(P, Q) \mid P, Q \in X\} \tag{4}$$

ここで，sup：集合の上限(superior)，P，Q：主河道Xの任意の２点であり，このとき(3)式より，

$$r = d(X) \text{のとき}, \; N = 1 \tag{5}$$

ここで，さらにパラメータφを介して流域面積Aと関係づけることができる(Fig.2).

$$d(X) = \phi\sqrt{A} \tag{6}$$

ここで，φ：流域の形状係数で，φ≧１，流域が正方形のとき１となる．

(3)式でrを小さくすると，D＝１となる，あるεに対し，L＝N・rが成立つ(r≦ε)．すなわち，

$$r = \varepsilon \text{のとき} L = N \cdot \varepsilon \tag{7}$$

ここで，ε：フラクタル下限長で，Fig.3,4において勾配が屈曲する点のrであり，(3),(5),(6),(7)式より，

$$\therefore L = \phi^{D} \varepsilon^{1-D} A^{D/2} \tag{8}$$

上式はフラクタル次元の定義式より導出されたHackの法則であり，水路網がフラクタルであれば，Lは流域全体の全河道長にまで拡張でき(そのときDは(2)式で定義される)，さらに流域が定義できれば，Horton解析における単位水流ごとにも(水流形状がフラクタルであれば)(8)式は成立することがわかる[6].

4.結論

1)河川地形則の１つであるHackの法則を，フラクタル次元の定義式より導出することに成功したが，同法則は，流域が定義できる任意の水流ないし水路網にまで拡張でき，Hortonの法則とも整合するものである．
2)河川のフラクタルの下限 ε は，対象区間の蛇行の最小波長の２分の１であることが判明した．

参考文献

1) Hack,J.T.:Studies of longitudinal stream profiles in Virginia and Maryland,Professional Paper 294-B,United States Geological Survey,Washington D.C.,1957.
2) Mandelbrot,B.B.:The Fractal Geometry of Nature,W.H.Freeman and Company,New York,1983.
3) Horton,R.E.:Erosional development of streams and their drainage basins,Hydrophysical approach to quantitative morphology,Bull.Ceol.Soc.Am.,56,pp.275-370,1945.
4) Barbera,P.L.,and Rosso R.:On the fractal dimension of stream networks,Water Resour.Res.,25(4) pp.735-741,1989.
5) Richardson,L.F.:Functional box counting analysis,Beitr.Phys.Atomos.,15,24,1929.
6) Ogawa,S.,1991,submitted.

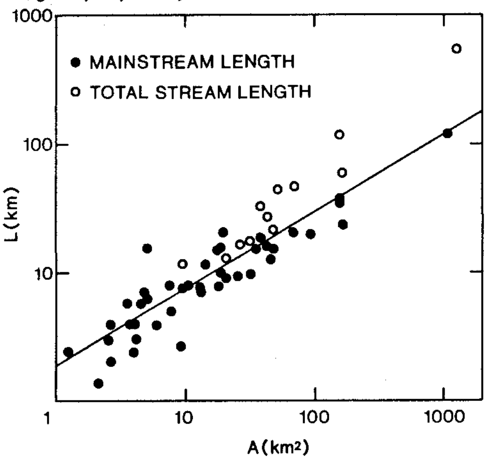

Fig.1　Hack's rule applied for Tama River.

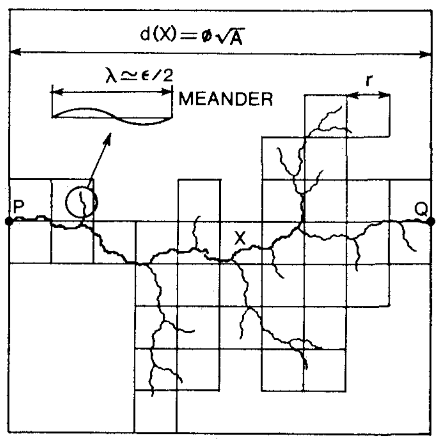

Fig.2　Functional box counting method.

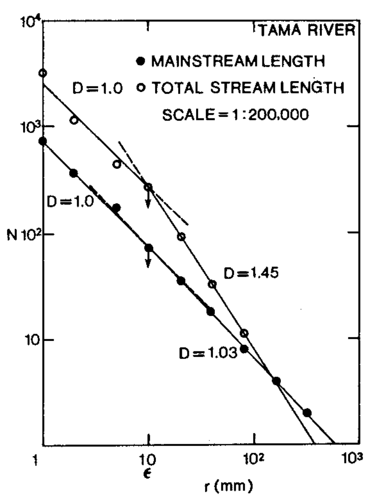

Fig.3　N-r plot for the main and total streams of Tama river.

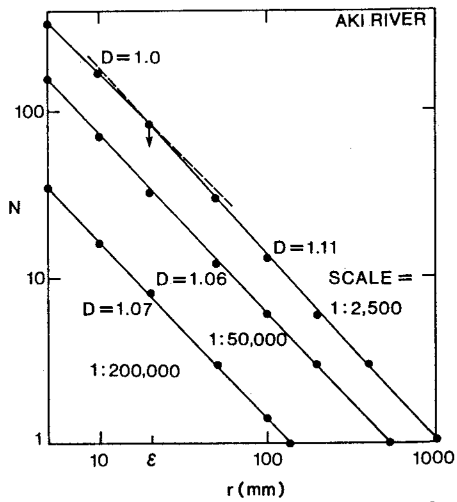

Fig.4　N-r plot depending on map scales.