II-2　重みつき線形回帰法によるレーダ定数の同定

東京大学生産技術研究所　正　員　○沖　大幹，虫明功臣

1. はじめに

レーダによる降水観測は，従来の雨量計観測網では得られない時間的空間的分解能を持つ．しかし，種々の要因からその定量的観測精度には問題があることが指摘されている．近年では二重偏波レーダなどさらに進んだレーダを用いて観測精度を向上させる研究が続けられているものの，現実には既存のレーダを用いて精度の良い降水観測をすることも求められている．本研究では，レーダ反射因子から降水強度への統計的換算係数を精度良く簡潔に決定する方式を提示し，実データに適用してその結果を既存の手法による結果と比較する．

2. 指数関数の重みつき線形回帰解析

一般に，(X_i, Y_i), (i=1,2,...,n) の n 対のデータを，推定誤差の自乗和 $S_n = \sum_i^n (Y_i - pX_i^q)^2$ が最小になるようにパラメータ p, q を最適化して $Y = pX^q$ 式で回帰する場合を考える．S_n を p, q で微分して，

$$\frac{\partial S_n}{\partial p} = \sum_i^n 2X_i^q(-Y_i + pX_i^q), \qquad \frac{\partial S_n}{\partial q} = \sum_i^n 2pX_i^q(\log X_i)(-Y_i + pX_i^q) \tag{1}$$

が得られる．ここで，全ての (X_i, Y_i) について，ある定数 p_0, q_0 に対して

$$Y_i = (p_0 + \delta p_i)X_i^{q_0}, \qquad Y_i = p_0 X_i^{q_0 + \delta q_i} \tag{2}$$

となる δp_i, δq_i を選ぶことができる．ここで，p_0, q_0 を最適パラーメータとすると，式 (1) で，

$$p = p_0, \qquad q = q_0, \qquad \frac{\partial S_n}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial S_n}{\partial q} = 0 \tag{3}$$

が成り立ち，式 (2) ～ (3) を式 (1) に代入し，p_0, q_0 が最適パラーメータであるときには式 (2) の δq_i が微小であると仮定として，$X_i^{(q_0 + \delta q_i)} = X_i^{q_0}(1 + \delta q_i \log X_i)$ と近似すると，

$$\sum_i^n p_i X_i^{2q_0} = 0, \qquad \sum_i^n (X_i^{q_0} \log X_i)^2 \delta q_i = 0 \tag{4}$$

が得られる．この式 (4) を満たす p_0, q_0 が最適パラメータである．

そこで，$\log Y = \log p + q \log X$ について p, q によらない重み関数 η_i を目的関数にかけて，$S_l = \sum_i^n \eta_i (\log Y_i - \log p - q \log X_i)^2$ が最小となるように線形回帰を行うことを考える．式 (1) と同様に p, q で微分すると

$$\frac{\partial S_l}{\partial p} = \sum_i^n \frac{2\eta_i}{p}(\log p - \log Y_i + q \log X_i), \qquad \frac{\partial S_l}{\partial q} = \sum_i^n 2\eta_i \log Xi(\log p - \log Y_i + q \log X_i) \tag{5}$$

となり，$p = p_0, q = q_0$ のとき

$$\frac{\partial S_l}{\partial p} = \sum_i^n -2\eta_i \frac{p_i}{p_0^2}, \qquad \frac{\partial S_l}{\partial q} = \sum_i^n -2\eta_i (\log X_i)^2 \delta q_i \tag{6}$$

である．比較すると，$\eta_i = X_i^{2q_0}$ の時，式 (4) を満たす p_0, q_0 は式 (6) も満たすことがわかる．従って，$(\log X_i, \log Y_i)$ に対して，$\eta_i = X_i^{2q_0}$ の重みづけをして線形回帰を行うことにより，(X_i, Y_i) に対する $Y = pX^q$ の形の非線形回帰の近似解が得られることになる．これを重みつき線形回帰法と呼ぶことにする．

Z-R 関係に適用すると，慣例に従いデシベルを用いて $x_i = 10\log_{10} Z_i$, $y_i = 10\log_{10} R_i$ と変換し，重み関数を $\eta_i = (Z_i/Z_0)^{2q_0}$,（ただし Z_0 は数値計算上の任意の定数）として，$\overline{xy} = (1/\sum_i^n \eta_i)\sum_{i=1}^n x_i y_i \eta_i$, $\overline{x} = (1/\sum_i^n \eta_i)\sum_{i=1}^n x_i \eta_i$, $\overline{y} = (1/\sum_i^n \eta_i)\sum_{i=1}^n y_i \eta_i$ を計算し，通常の線形回帰と同様に $y = ax + b$ の最適パラメータを求めれば良い．得られた a，b から $\beta = 1/a$，$B = 10^{-(b/10a)}$ が導出される．q_0 がインプリシットなパラメータであるため若干の繰り返し計算が必要であるが，変数がひとつであるため手続きは極めて容易である．

3. 実データへの適用と結果

ここでは，雨滴計データから疑似的にレーダ反射因子(Z)ならびに降水強度(R)を求めて，このデータに対するレーダ定数の最適同定を行う．実データを用いないため，レーダと地上雨量計との空間的・時間的不整合や，地形，レーダビームなどによる種々の誤差要因を排除して，降雨の特性に基づいた同定手法の比較が可能である．82 降雨について，1 分間降水強度 0.1mm/h 以上，レーダ反射因子−10dBZ 以上に相当する毎分のデータに対し，対数線形回帰，層別平均値法[上林・山口・山本, 1988]，本研究で提案した重みつき線形回帰，そして quasi-Newton 法による非線形回帰 [D.Kahaner et.al, 1989] を適用してレーダ定数の同定を行い，得られた一雨ごとのパラメータを用いてZからRを算定し，それぞれの一雨降水量について比較を行った．結果を表-1に示す．ただし，平均や分散の比較条件として，(a)0.1mm/h 以上(全て)の降水データ，(b)1.0mm/h 以上の降水データのみ，そして(c)10.0mm/h 以上の降水データのみ，の3通りを設定した．

表 1: 同定されたそれぞれのレーダ定数を用いた一雨降水量の比較

同定手法	総降水量(mm) 平均値			真値に対する比(%) 平均値			真値に対する比(%) 標準偏差			真値との差(mm) 標準偏差		
	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
対数線形回帰	15.6	11.7	4.8	65.6	46	20.6	15.5	17	12.2	19.7	21.6	24.9
層別平均値法	21.0	15.1	5.7	88.0	59	27.1	21.1	14	9.2	10.8	14.8	23.4
重みつき線形回帰	24.7	22.8	16.9	95.3	92	89.6	4.6	9	9.3	1.45	1.3	1.7
非線形回帰	25.3	23.1	16.1	100.7	97	91.3	3.1	8	8.3	1.0	0.8	1.2
真値	25.7	23.9	18.0	100	100	100	0	0	0	0	0	0

対数値に対して単純に線形回帰を行った場合には，真数値の誤差は極めて大きくなる．この原因として，1) 対数値を用いた回帰分析では強い反射強度に対する降水量の推定誤差を小さく見積もってしまうこと，があり，さらには，2) 降水観測では弱い反射強度のデータが多いこと，が 1) による誤差を増大させていると考えられる．層別平均値法では，データサンプルの個数に依存した 2) の影響はうまく除去されていると考えられるが，対数値で回帰を行っているため 1) の影響は除去できず，やはり弱い反射強度に対する推定誤差を相対的に大きく見積もる結果になっていると思われる．

一方，重みつき線形回帰を行うと，かなり良い推定値が得られ，少なくともレーダデータの同定に対しては，重みつき線形解析の導出における仮定が適切であったものと思われる．非線形回帰は同定パラメータの推定初期値や正規化係数などに左右され，プログラムの調整に手間取るが，うまく同定できれば極めて良好な値が得られる．近年の計算機環境を考えると非線形回帰を行わない理由はあまりないと考えられるが，様々なデータに対して一様に回帰計算を行いたい場合には重みつき線形回帰は有効な手段となるであろう．

4. おわりに

実際のレーダデータに対して，新しく提案された重みつき線形回帰法を適用して，その妥当性を確かめることも必要であろう．しかし，たとえ定性的であっても大変貴重な情報が得られる，レーダを用いた降水予測の研究の方が，今後ますます重要になると考えられる．

謝辞： 建設省土木研究所の水文研究室からは雨滴計のデータを提供していただきました．また，本研究は文部省科学研究費奨励(A)02750424，及び(財)河川情報センターの援助の下に行われました．ここに記して心から感謝の意を表します．

参考文献

上林好之，山口高志，山本晃一(1988)：レーダ定数（B，β）の同定手法の提案，土木学会論文集第 399 号 II-10，121-130．

D.Kahaner, C.Moler and S.Nash(1989)：Numerical methods and software, Pretice-Hall International, Inc., 347-384.