土木学会第46回年次学術講演会（平成３年９月）

I-493　　二層円筒殻の衝撃応答解析

北海道大学　工学部　正員　三上　隆

1.はじめに　　二層円筒殻の衝撃応答解析は，せん断変形・回転慣性の影響を無視した古典理論に基づく場合が多く[1]，せん断変形・回転慣性の影響を取り入れた修正理論による解析は比較的少ない。ここでは，Mirsky-Herrmann の修正理論[2]の二層円筒殻への拡張を試み，その特別なケースとして各層のポアソン比が等しい場合を固有関数展開法(モード法)[3]で解析する。

2.基礎方程式　　基礎方程式の誘導に当たって，層間のすべりはなく，各層は弾性係数が異なる等方性材料と仮定する。経線，円周方向座標を(x, y)，法線方向座標zを垂直外向きに定める。座標(x, y, z)に対応する変位成分を(u, v, w)，(x, y)軸に垂直な断面の回転角成分を(β_x, β_y)とする。合応力および合モーメント成分を$(N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, Q_x, Q_y)$および$(M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx})$で表す。時間を$t$，ポアソン比を$\nu$とし，弾性係数を$E$，厚さ$h$および単位体積当りの質量$\rho$をそれぞれ$(E_1, E_2)$，$(h_1, h_2)$および$(\rho_1, \rho_2)$と表す。ただし，添字1は内側の層，添字2は外側の層の諸量を表すものとする。さらに，円筒殻の半径と長さをそれぞれa，Lで表す。

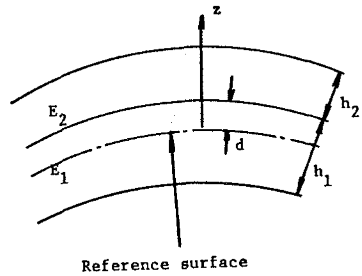

図-1　二層円筒殻

上述の仮定によれば，中央面ひずみと合モーメントあるいは曲率と面内合応力等を関係づける曲げ－伸びカップリング剛性を零になるように殻の参照面を定めることができ，図-1のdは次式で与えられる。

$$d=(E_1h_1^2+E_2h_2^2)/\{2(E_1h_1+E_2h_2)\} \quad \cdots\cdots (1)$$

式(1)を用いれば，二層円筒殻の合応力および合モーメントとひずみ，曲率の関係式は，Mirsky-Herrmannの単層(一層)円筒殻理論において，伸び剛性Kおよび曲げ剛性Dを次式で置き換えれば得られる。

$$K=(E_1h_1+E_2h_2)/(1-\nu^2) \quad \cdots\cdots (2\text{-}1)$$

$$D=[E_1h_1^3+E_2h_2^3-3(E_1/(1-\nu^2)h_1^2-E_2h_2^2)^2/\{4(E_1h_1+E_2h_2)\}]/\{3(1-\nu^2)\} \quad \cdots\cdots (2\text{-}2)$$

なお等価厚さをh_0，等価弾性係数をE_0と表し，伸び剛性を$K=E_0h_0/(1-\nu^2)$および曲げ剛性を$D=E_0h_0^3/\{12(1-\nu^2)\}$で定義すれば，二層円筒殻の合応力および合モーメントは次式で与えられる等価厚さおよび等価弾性係数を有する単層円筒殻のそれに等価となる。

$$h_0=(12D/k)^{1/2} \qquad E_0=(1-\nu^2)(k^3/12D)^{1/2} \quad \cdots\cdots (3)$$

二層円筒殻の基礎微分方程式は，ひずみエネルギー，運動エネルギーを用いて，Hamiltonの原理より以下のように得られる。

$$N_{x,x}+N_{yx,y}=(M_1+M_2/a)u_{,tt}+(M_2+M_3/a)\beta_{x,tt} \quad \cdots\cdots (4\text{-}1)$$

$$N_{y,y}+N_{xy,x}+Q_y/a=(M_1+M_2/a)v_{,tt}+(M_2+M_3/a)\beta_{y,tt} \quad \cdots\cdots (4\text{-}2)$$

$$Q_{x,x}+Q_{y,y}-N_y/a=(M_1+M_2/a)w_{,tt}+p_z \quad \cdots\cdots (4\text{-}3)$$

$$M_{x,x}+M_{yx,y}-Q_x=(M_2+M_3/a)u_{,tt}+M_3\beta_{x,tt} \quad \cdots\cdots (4\text{-}4)$$

$$M_{y,y}+M_{xy,x}-Q_y=(M_2+M_3/a)v_{,tt}+M_3\beta_{y,tt} \quad \cdots\cdots (4\text{-}5)$$

ここでp_zは法線方向の作用荷重であり，M_1，M_2およびM_3はそれぞれ並進慣性，並進-回転慣性および回転慣性を表し次式で与えられる。

$$M_1=(\rho_1h_1+\rho_2h_2) \quad \cdots\cdots (5\text{-}1)$$

$$M_2=(\rho_1h_1+\rho_2h_2)d-(\rho_1h_1^2-\rho_2h_2^2)/2 \quad \cdots\cdots (5\text{-}2)$$

$$M_3=(\rho_1h_1+\rho_2h_2)d^2-(\rho_1h_1^2-\rho_2h_2^2)d+(\rho_1h_1^3-\rho_2h_2^3)/3 \quad \cdots\cdots (5\text{-}3)$$

なお式(4)は，$h_1=h_2=h/2$ ，$E_1=E_2=E$および$\rho_1=\rho_2=\rho$とおけば，Mirsky-Herrmannの与えた基礎方程式[2)]に一致する。

$x=0, X=L$における境界条件は，(u, N_x), (v, N_{xy}), (w, Q_x)および(β_y, M_{xy})の適当な組合せで規定され，本報告で取り上げる両端支持条件に対しては次式となる。

$w=v=\beta_y=N_x=M_x=0$ .... (6)

3.解析手順

1) 自由振動問題

式(6)の条件を満足する変位関数に，変位成分$(u, v, w, \beta_x, \beta_y)$に対応する固有振動モードの係数を$(U^0_{mn}, V^0_{mn}, W^0_{mn}, X^0_{mn}, Y^0_{mn})$とする次式を採用する。例えば

$u(x, y, t)=\Sigma aU^0_{mn}\cos(\alpha x)\cos(ny/a)T_{mn}(t)=\Sigma aU_{mn}T_{mn}(t)$ .... (7-1)

$v(x, y, t)=\Sigma aV^0_{mn}\sin(\alpha x)\sin(ny/a)T_{mn}(t)=\Sigma aV_{mn}T_{mn}(t)$ .... (7-2)

$\beta_x(x, y, t)=\Sigma X^0_{mn}\cos(\alpha x)\cos(ny/a)T_{mn}(t)=\Sigma X_{mn}T_{mn}(t)$ .... (7-3)

ここで，$T_{mn}(t)$は一般化座標，$\alpha=m\pi/L$, mおよびnはそれぞれx, y方向の半波数である。

式(4)で$p_z=0$, 式(7)で$T_{mn}(t)=\exp(i\omega t)$, ［$\omega$=固有円振動数］と表し，式(7)を式(4)に代入すれば，次の振動数方程式が得られる。

$[\,[k]-\Omega_{mn}^2\,[M]\,]\ \{\triangle\}=0$ .... (8)

ここで，［k］と［M］は5x5の行列，｛△｝と無次元化固有振動数 Ω_{mn}^2 は次のようなものである。

$\{\triangle\}^t=\{U^0_{mn}, V^0_{mn}, W^0_{mn}, X^0_{mn}, Y^0_{mn}\}$,　　$\Omega_{mn}^2=a^2\omega^2(\rho_1h_1+\rho_2h_2)/K$ .... (9)

2) 衝撃応答解析

固有モードの直交性を利用すれば，ノルムJ_{mn} は次のように得られる。

$J_{mn}=\int\int\ [I_1(U_{mn}^2+V_{mn}^2+W_{mn}^2)^2+2I_2(X_{mn}U_{mn}+Y_{mn}V_{mn})+I_3(X_{mn}^2+Y_{mn}^2)]\,dxdy$ .... (10)

固有関数展開法(モード法)によれば，一般化座標 $T_{mn}(t)$について時間に関する次の微分方程式え得られる。

$d^2T_{mn}/d\tau^2+\Omega_{mn}^2T_{mn}=Q_{mn}(\tau)/J_{mn}$ .... (11)

ここで，無次元化時間$\tau=\omega_0 t$ ［ただし$\omega_0=(a^2(\rho_1h_1+\rho_2h_2)/K)^{1/2}$］

$Q_{mn}(\tau)=(a/K)\int\int\ p_z(x, y, \tau)w_{mn}\,dxdy$ .... (12)

変位と速度が零の同次初期条件に対する式(11)の解は次のように得られる。

$T_{mn}(\tau)=(1/\Omega_{mn}J_{mn})\int\ Q_{mn}(\tau)\sin\Omega_{mn}(\tau-\eta)d\eta$ .... (13)

従って衝撃荷重を受ける円筒殻の変位，合応力・合モーメントは式(13)を用いることにより求められる。

参考文献

1)Bushnell, D.: Dynamic responce of two-layered cylindrical shells to time-dependent loads, AIAA J, pp.1698-1703, 1965.

2)Mirsky, I. and Herrmann, G.: Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells, J.Acoust.Soc.Am., pp.1116-1123, 1957.

3)Magrab, E.B.: Vibrations of Elastic Structural Members, Sijthoff & Noordhoff ,1979.