

長岡技術科学大学 正会員 岩崎英治

長岡技術科学大学 正会員 林 正

## 1. まえがき

衝撃問題では、瞬間的に外力が作用するために、構造物の限られた部分に多くのエネルギーが集中して、破壊的な状況に陥ることが多いことから、局所的には非線形挙動が現れるものと考えられるが、緩衝材等により構造全体は線形に近い挙動を示しているものと思われる。ところで、衝撃応答などの波動問題に、ラプラス変換<sup>1)</sup>を適用すると、解析解が得られることが少なく無く、このような変換は有力な手段と考えられる。しかし、逆変換に困難を伴うことも少なくないので数値的に逆変換する種々の手法が考案されている<sup>2), 3)</sup>。

そこで、本報告ではラプラス変換された像空間での運動方程式が得られるような汎関数に、マトリックス法を用い、得られた解を実空間での解に変換するために数値ラプラス変換法を適用して、構造全体の衝撃応答を容易に解析できるような一解析法を示す。なお、本報告では議論を単純にするためにBernoulli-Eulerの仮定を満足する平面骨組部材を対象にする。

## 2. ラプラス変換された像空間での変分原理

時間についてラプラス変換した像空間での変分原理を誘導する。部材軸を $x_1$ とした座標系 $(x_1, x_2, x_3)$ において、部材は $x_1-x_3$ 面内でのみ変位するものとする。部材軸上の $x_1, x_3$ 方向変位を $u_1, u_3$ 、断面積と断面2次モーメントを $A, I$ 、弾性係数と密度を $E, \rho$ とする。

Bernoulli-Eulerの仮定を満足する骨組部材の運動方程式と境界条件式をラプラス変換した式を停留条件とするような汎関数 $\pi^*$ は、次式で与えられる。

$$\pi^* = \frac{1}{2} \int_0^l \{EA(u_{1,1}^*)^2 + EI(u_{3,11}^*)^2\} dx + \frac{1}{2} s^2 \int_0^l \{\rho A[(u_1^*)^2 + (u_3^*)^2] + \rho I(u_{3,1}^*)^2\} dx - \int_0^l (\hat{q}_1^* u_1^* + \hat{q}_3^* u_3^* - \hat{m}^* u_{3,1}^*) dx - \left[ \bar{n}(\bar{Q}_1^* u_1^* + \bar{Q}_3^* u_3^* - \bar{M}^* u_{3,1}^*) \right]_0^l \quad (1)$$

ここに、 $s$ は時間 $t$ に対応した複素変数である。 $u_1^*, u_3^*$ は変位 $u_1, u_3$ を時間についてラプラス変換したものであり、 $\bar{Q}_1^*, \bar{Q}_3^*, \bar{M}^*$ はそれぞれ $x_1, x_3$ 方向の部材端荷重、 $x_2$ 軸まわりの部材端モーメントをラプラス変換したものである。 $\hat{q}_1^*, \hat{q}_3^*, \hat{m}^*$ は、 $x_1, x_3$ 方向の分布荷重、 $x_2$ 軸まわりの分布モーメントをラプラス変換した $q_1^*, q_3^*, m^*$ と $x_1, x_3$ 方向の初期変位 $d_1, d_3$ 、初速度 $v_1, v_3$ から次式で表される。

$$\hat{q}_1^* = q_1^* + \rho A(v_1 + s d_1), \quad \hat{q}_3^* = q_3^* + \rho A(v_3 + s d_3), \quad \hat{m}^* = m^* - \rho I(v_{3,1} + s d_{3,1}) \quad (2)$$

なお、 $\bar{n}$ は $x_1=0$ で $-1$ 、 $x_1=l$ で $+1$ の値をとり、 $(\cdot)_{,1}$ は $x_1$ による微分を表す。

## 3. マトリックス法の定式化

像空間での解を、実空間に逆変換するために、 $s$ の種々の値について解析を行う必要があり、さらにこの空間では変位や力を複素変数として扱わなければならないが、時間に関する導関数を含んでいないので、静的問題と同様の定式化が行える。本報告では高次の変位モードを含んだ次のような変位関数を用いる。

$$\left. \begin{aligned} u_1^* &= (1-\xi) u_{1a}^* + \xi u_{1b}^* + (\xi-\xi^2)(a_0^* + a_1^* \xi + a_2^* \xi^2 + \dots) \\ u_3^* &= (1-\xi)^2 (1+2\xi) u_{3a}^* - \xi(1-\xi)^2 l \theta_{2a}^* + \xi^2 (3-2\xi) u_{3b}^* + \xi^2 (1-\xi) l \theta_{2b}^* + (\xi-\xi^2)^2 (b_0^* + b_1^* \xi + b_2^* \xi^2 + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 $u_{1a}^*, u_{1b}^*, u_{3a}^*, u_{3b}^*, \theta_{2a}^*, \theta_{2b}^*$ は部材両端の節点 $a, b$ の変位と回転をラプラス変換した諸量であり、 $\xi$ は $a$ 端で $0$ 、 $b$ 端で $1$ の値をとる正規座標である。 $a^*_i, b^*_i (i=0, 1, 2, \dots)$ は未定係数であり、式(1)の停留条件を用いて1要素6自由度の要素剛性方程式に縮約する。

## 4. 数値ラプラス変換

連続関数 $f(t)$ を時間 $t$ に関してラプラス変換した関数を $F(s)$ として、ラプラス変換と逆変換の定義式を変形すると、次式が得られる。

$$F(s) = \int_0^\infty g(t) e^{-i\omega t} dt, \quad g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(s) e^{i\omega t} d\omega \quad (4)$$

ここに、 $s$ の実部は逆変換を求めるときに定数として扱うので、 $g(t)=f(t)e^{-\alpha t}$ とおき、 $s$ の実部と虚部はそれぞれ $\alpha, \omega$ である。また、計算上これらを数値的に扱うために、 $f(t)$ と $F(s)$ を $t, \omega$ それぞれの有限区間 $[0 \sim T], [-\Omega/2 \sim \Omega/2]$ 内の離散的な値で表現しなければならない。

そこで、 $t, \omega$ は次の $N$ 個の離散点で与えるものとする。

$$t_m = m \Delta t, \quad \omega_k = \{k - (N-1)/2\} \Delta \omega \quad (m, k=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (5)$$

なお、離散点は等間隔として $\Delta t, \Delta \omega$ は $T/N, \Omega/N$ で与えられる。

ところで、 $\omega$ を円振動数と見なすと、時間 $T$ を1周期としたときの最小の円振動数 $\Delta \omega$ は $2\pi/T$ で与えられる。これより、 $\Omega$ は $2\pi N/T$ で与えられ、式(4)は次のように( $\sigma_k=1$ とおいた式に)離散化される。

$$F_k = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} g_m \exp(-2\pi i \frac{km}{N}), \quad g_m = \sum_{k=0}^{N-1} F_k \sigma_k \exp(2\pi i \frac{km}{N}) \quad (6)$$

ここに、 $g_m, f_m$ の関係と $\sigma_k$ は次式で与えられる。

$$g_m = (-1)^m T f_m \exp\{-(\alpha T + \pi i) \frac{m}{N}\}, \quad \sigma_k = \frac{1}{2\beta} (e^\beta - e^{-\beta}), \quad \beta = (\alpha + i\omega_k) \Delta t \quad (7)$$

なお、 $F_k$ は $\omega_k$ 、 $g_m$ と $f_m$ は $t_m$ での値である。また、 $\sigma_k$ は応答波形を平滑化する(Lanczosの)係数である。

式(6),(7)より数値的にラプラス変換と逆変換が行える。また、これらの演算を実行するときにはFFTのアルゴリズムが使用できる。この式の誘導において、 $t$ と $\omega$ の定義域を有限にしていることと、関数を有限区間の周期関数として扱っていることから、変換の精度は離散点の数 $N$ 、時間 $T$ と $s$ の実部 $\alpha$ に大きく依存し、 $T/N$ を小さくすることにより精度は向上する。また、 $\alpha$ についてはパラメトリックに種々の値に対する検討を行うと、最適な値が存在することを確認できる。理論的に最適な $\alpha$ は現在のところ確認していないが、計算結果から $\alpha \approx \Delta \omega$ 以外では精度の悪化が見られる。これより、以下の計算例では $\alpha = \Delta \omega$ とする。

## 5. 数値計算例

棒の縦衝撃と梁の曲げ衝撃問題を対象にして、部材を10分割した本手法(マトリックス法と数値ラプラス変換法)の結果を、それぞれ図-1, 図-2に示す。また、像空間でのこれらの解析解を逆変換した結果と、曲げ衝撃については実空間での解析解が容易に見いだせないことから、半無限長梁の結果も示している。荷重は $t=0$ から $t_a/2$ 時間だけ作用する長方形パルスとし、解析時間はそれぞれ $5t_a, 2t_a$ としている( $t_a$ は縦波が $l$ だけ伝播する時間)。計算例での変位関数は、式(3)の $a^*_{i1}, b^*_{i1} (i=0, 1, 2)$ まで用いている。また、時間の離散点には128点を用いている。なお、図-2は細長比 $l/\sqrt{I/A}=50$ とし、式(1)の波線(回転慣性)の項を省略した結果である。

縦衝撃の解は長方形パルス状の応答をすることから、 $N=128$ での逆変換の精度が明らかになる。また、両図もとに本手法と像空間での解析解を逆変換した結果がほぼ一致していることから、この種の問題では、この変位関数を用いて10要素程度で十分と考えられる。

## 6. あとがき

本手法は、動的問題を静的問題と同等の定式化により扱え、種々の $s$ に対する解析が独立に行える。また、モード解析法のように固有値解析を必要としないことと、初期条件を正確に考慮できる特徴がある。

参考文献 1)多谷虎男: 振動・衝撃の基礎理論とラプラス変換, 学会出版センター, 1984. 2) Davies, B. and Martin, B.: Numerical Inversion of the Laplace Transform: A Survey and Comparison of Methods, J. Comp. Phys. 33, 1979. 3) 林 卓夫・田中吉之助: 衝撃工学, 日刊工業新聞社, 1988.

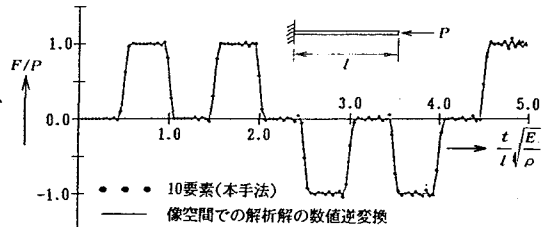


図-1 棒の縦衝撃(部材中央の軸力応答,  $N=128$ )

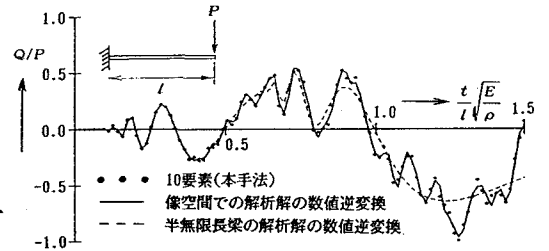


図-2 梁の曲げ衝撃(部材中央のせん断力応答,  $N=128$ )