

長崎大学工学部 学生員 ○其田智洋

長崎大学工学部 正 員 高橋和雄

日本道路公団 正 員 中村敏朗

1. まえがき 構造物の動的安定性の研究は、これまで数多く行われており、Applied Mechanics Reviewで、この10年間の総括が行われようとしている。最近の研究の動向として、宇宙構造物や制振を取り扱った研究が増えている。たとえば、構造物と熱との相関、複合材料、境界もしくは内部で弾性支持された場合や変断面などの場合に拡張されつつある。Kar<sup>1)</sup>はPasternak基礎上の変断面片持ちばりに熱勾配がある場合の動的安定性を解析している。われわれは、Karの解析を平板に拡張することを計画している。本研究は、その第一段階として、Pasternak基礎上の長方形板の振動、座屈、動的安定性を各種の境界条件、Pasternak基礎のバネおよびせん断層の剛性パラメーターのもとに解析するものである。

2. 運動方程式および解法 図-1に示すようなバネとせん断層からなるPasternak基礎上の長方形板が静的面内力と変動面内力を受ける場合の運動方程式は次のように与えられる<sup>1)</sup>。

$$L(w) = D \nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K_s w - K_a \nabla^2 w + (N_{x0} + N_{xt} \cos \Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ ：板剛度、 $E$ ：ヤング率、 $h$ ：板厚、 $\nu$ ：ポアソン比、 $w$ ：たわみ、 $\rho$ ：板の密度、 $K_s$ ：バネ定数、 $K_a$ ：せん断定数、 $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ 、 $x, y$ ：平板中央面の座標系、 $\Omega$ ：変動面内力の円振動数、 $t$ ：時間。

長方形板の境界条件は、つぎの4種類を考える。

CASE I：全周辺単純支持、CASE II：荷重辺単純支持、他対辺固定、

CASE III：荷重辺固定、他対辺単純支持、CASE IV：全周辺固定。

式(1)の一般解を次のように仮定する。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) W_{mn}(x, y)$$

ここに、 $T_{mn}$ ：時間関数、 $W_{mn}$ ：境界条件を満足する座標関数で次式の関数を用いる。

$$W_{mn} = h_m(\xi) \bar{h}_n(\eta) \quad (3)$$

$$h_m(\xi) = \sin m\pi\xi \text{ (CASE I, II)}, h_m(\xi) = \cos(m-1)\pi\xi - \cos(m+1)\pi\xi \text{ (CASE III, IV)}$$

$$\bar{h}_n(\eta) = \sin n\pi\eta \text{ (CASE I, III)}, \bar{h}_n(\eta) = \cos(n-1)\pi\eta - \cos(n+1)\pi\eta \text{ (CASE II, IV)}$$

式(2)を式(1)に代入すれば次式が得られる。

$$L(w) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [h_m \bar{h}_n \ddot{T}_{mn} + \frac{\pi^4}{k_{ii}^4} \{ (\frac{1}{\beta^4} f_m \bar{h}_n + \frac{2}{\beta^2} g_m \bar{h}_n + h_m \bar{f}_n) + \kappa_s^* h_m \bar{h}_n + \kappa_a^* (\frac{1}{\beta^2} g_m \bar{h}_n + h_m \bar{g}_n) \} T_{mn} - \frac{\pi^4 \lambda_{cr}}{k_{ii}^4 \beta^2} (N_{x0} + N_{xt} \cos \bar{\omega} \tau) g_m \bar{h}_n T_{mn}] \quad (4)$$

ここに、 $g_m(\xi) = m^2 \sin m\pi\xi$  (CASE I, II),  $g_m(\xi) = (m-1)^2 \cos(m-1)\pi\xi - (m+1)^2 \cos(m+1)\pi\xi$  (CASE III, IV)

$$f_m(\xi) = m^2 \sin m\pi\xi \text{ (CASE I, III)}, f_m(\xi) = (m-1)^2 \cos(m-1)\pi\xi - (m+1)^2 \cos(m+1)\pi\xi \text{ (CASE II, IV)}$$

$$\beta = a/b, \kappa_s^* = K_s b^4/D\pi^4, \kappa_a^* = K_a b^2/D\pi^2, k_{ii}^4 = \rho h b^4 \omega_{11}^2/D, \lambda_{cr} = N_{cr} b^2/D\pi^2, \tau = \omega_{11} t$$

$$\bar{N}_{x0} = N_{x0}/N_{cr}, \bar{N}_{xt} = N_{xt}/N_{cr}, \bar{\omega} = \Omega/\omega_{11}$$

式(4)にGalerkin法を適用する。すなわち、

$$\iint L(w) h_r \bar{h}_s d\xi d\eta = 0 \quad \text{ここに、} r=1, 2, \dots, N, s=1, 2, \dots, N \quad (5)$$

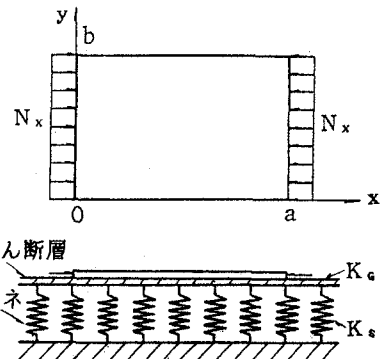


図-1 Pasternak基礎上の長方形板の一般図

$$\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [G_{mrns} \ddot{T}_{mn} + \frac{\pi^4}{k_{ii}^4} E_{mrns} T_{mn} - \frac{\pi^4 \lambda_{cr}}{k_{ii}^4 \beta^2} (\bar{N}_{x0} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau) F_{mrns} T_{mn}] = 0 \quad (6)$$

$$\text{ここに、} E_{mrns} = \frac{1}{\beta^4} I_{mr}^3 \bar{I}_{ns} + \frac{2}{\beta^2} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}^2 + I_{mr} \bar{I}_{ns}^3 + \kappa_s^* I_{mr}^1 \bar{I}_{ns} + \kappa_g^* \left( \frac{1}{\beta^2} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns} + I_{mr} \bar{I}_{ns}^2 \right),$$

$$F_{mrns} = \frac{1}{\beta^2} I_{mr}^2 \bar{I}_{ns}, \quad G_{mrns} = I_{mr}^1 \bar{I}_{ns}$$

上式を行列表示すると、次式が得られる。

$$\{\ddot{T}\} + ([A] + \bar{N}_{x0} [B]) \{T\} + \bar{N}_{xt} \cos \bar{\omega} \tau [B] \{T\} = \{0\} \quad (7)$$

$$\text{ここに、} [A] = \frac{\pi^4}{k_{ii}^4} [G]^{-1} [E], \quad [B] = -\frac{\pi^4 \lambda_{cr}}{k_{ii}^4 \beta^2} [G]^{-1} [F],$$

$$\{T\} = \{T_{11} T_{12} \cdots T_{1N} T_{21} T_{22} \cdots T_{NN}\}^T, \quad [G] = G \{s+(r-1)N, n+(m-1)N\},$$

$$[E] = E \{s+(r-1)N, n+(m-1)N\}, \quad [F] = F \{s+(r-1)N, n+(m-1)N\}$$

式(7)は連立のMathieuの方程式である。文献2)の方法を用いて不安定領域を境界条件、縦横比 $\beta$ 、無次元バネ定数 $\kappa_s^*$ 、無次元せん断定数 $\kappa_g^*$ のもとに解析することができる。

**3. 数値結果 (1)固有振動解析** 図-2に全周辺単純支持正方形板(CASE I,  $\beta=1.0$ )の固有振動特性を示す。縦軸 $\omega$ は無次元振動数( $\omega = \omega_{ij} / \omega_{11}$ )で横軸 $\kappa_g^*$ はせん断層の剛性パラメーターである。 $\kappa_g^*=0$ の場合はWinkler基礎に相当する。 $\kappa_s^*$ および $\kappa_g^*$ はともに固有振動数を増加させるが、その効果は高次振動になるほど小さくなる。

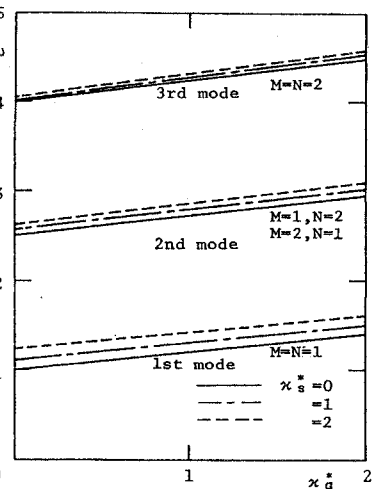


図-2 正方形板の固有振動数比

**(2)座屈解析** 図-3は全周辺単純支持の長方形板(CASE I,  $\kappa_s^*=2.0$ )の座屈曲線を示す。座屈特性は弾性基礎のない場合と同じ特性を示す。

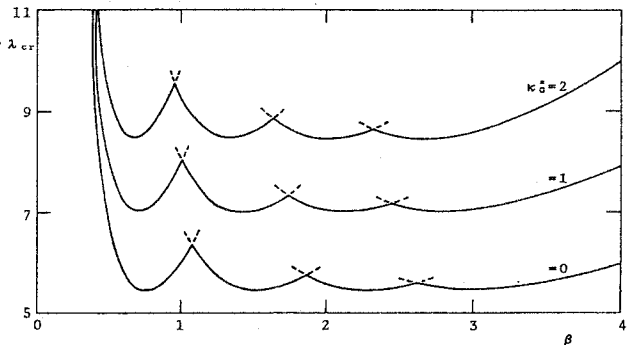


図-3 長方形板の座屈曲線

**(3)不安定領域** 図-4は、全周辺単純支持正方形板(CASE I,  $\beta=1.0$ )の不安定領域を示したものである。図中の縦軸は変動面内力の振幅 $\bar{N}_{xt}$ を、横軸は静的面内力 $\bar{N}_{x0}=0$ のときの1次の固有円振動数で無次元化した励振振動数 $\bar{\omega}$ である。図中の右上がりの斜線部が単純共振 $2\omega_{ij}/k$ の不安定領域を意味する。不安定領域の幅は、弾性基礎がない場合に比べて狭い<sup>3)</sup>。

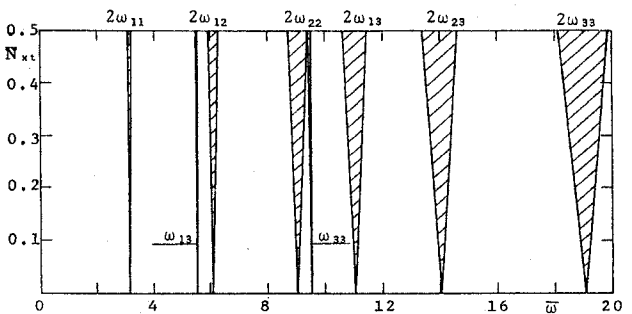


図-4 不安定領域( $\kappa_s^*=2.0$ ,  $\kappa_g^*=2.0$ ,  $\bar{N}_{x0}=0.0$ )

**4. まとめ** バネとせん断層の剛性パラメーターは低次振動に効き、高次になるほど効かなくなる。また、座屈荷重を増大させる。他の境界条件については講演時に発表する。

#### 参考文献

- 1) Kar, R.C. and Sujata, T.: Computer & Structures (1988), Vol. 29, No. 4, pp. 591-599.
- 2) Takahashi, K.: Journal of Sound and Vibration (1982), Vol. 85, pp. 257-262.
- 3) 八巻・永井: 速研報告 (1975), Vol. 36, No. 351, pp. 147-168.