

I-478 Pasternak基礎上の温度勾配をもつ変断面片持ちばりの動的安定性

佐藤 工業(株) 正 員 ○白木 徳夫
 長崎大学工学部 正 員 高橋 和雄
 長崎大学工学部 正 員 小西 保則

1. まえがき はりの動的安定性の研究はこれまで数多く研究され、解法および現象も明確になってきている。最近では、変断面、熱、弾性支承を考慮した複雑な構造部材や、複合材料からなる部材などへの応用が試みられている。このような研究の例として、Kar¹⁾はPasternak基礎上の熱勾配をもつ変断面片持ちばりの動的安定性の解析を行っているが、解析をBolotinの方法を用いて行っているために、不安定領域は単純共振のみしか得られていない。また、解析にあたってのミスや、解の精度に問題がある。そこで、本研究は、Kar¹⁾の問題を、文献2)で提案した方法を用いて詳しく解析し、数値計算において、系の固有振動、座屈特性および動的不安定領域を各種の無次元パラメーターのもとに明らかにする。

2. 基礎式および解法 先端で周期的軸方向荷重 $P(t) = P_0 + P_1 \cos \omega t$ を受ける長さ方向に線形的に変化する長方形断面をもつPasternak基礎上の片持ちばりの一般図を図-1に示す。また、このはりは一様な温度勾配(定常温度分布)をもつ。はりの長さを L 、任意点のたわみ y 、ヤング率 $E(x)$ 、断面2次モーメントを $I(x)$ 、断面積 $A(x)$ 、密度 ρ 、弾性基礎の剛度 K_e 、せん断層の剛度 K_s とすれば、Bernoulli-Eulerばりの理論のもとづくはりの運動方程式は、次のように与えられる。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [E(x) I(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] + \{P(t) - K_s\} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + K_e y + \rho A(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

上式をはりの長さ L 、自由端の断面(b_1, h_1)と、ヤング率 E_1 および横波の伝播速度 c を用いて無次元化すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [S(\xi) T(\xi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2}] + \{p(\tau) - k_s\} \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi^2} + k_e \eta + m(\xi) \frac{\partial^2 \eta}{\partial \tau^2} = 0 \quad (2)$$

ここに、 $\xi = \frac{x}{L}$, $\eta = \frac{y}{L}$, $\tau = c t$, $c^2 = \frac{E_1 I_1}{\rho A_1 L^4}$, $p(\tau) = \frac{P(t) L^2}{E_1 I_1}$,
 $\alpha = \frac{P_0}{P^*}$, $\beta = \frac{P_1}{P^*}$, $P^* = \frac{P^* L^2}{E_1 I_1}$, $k_e = \frac{K_e L^4}{E_1 I_1}$, $k_s = \frac{K_s L^2}{E_1 I_1}$, $\bar{\omega} = \frac{\omega}{c}$

$p(\tau) = (\alpha + \beta \cos \bar{\omega} \tau) P^*$, $S(\xi) = [1 + \alpha^*(1 - \xi)][1 + \beta^*(1 - \xi)]^2$,

$m(\xi) = [1 + \alpha^*(1 - \xi)][1 + \beta^*(1 - \xi)]$, $T(\xi) = [1 - \delta(1 - \xi)]$,

α^*, β^* は断面変化パラメーター、 δ は温度パラメーター、

$k_e^* (=k_e / \pi^4)$, $k_s^* (=k_s / \pi^2)$ はPasternak基礎パラメーター

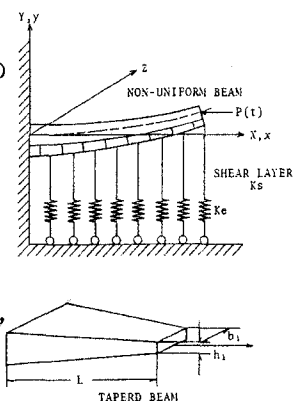


図-1 片持ちばりの一般形状

式(2)の一般解を次のように仮定する。 $\eta(\xi, \tau) = \sum_{r=1}^n f_r(\tau) \eta_r(\xi) \quad (3)$

ここに、 $f_r(\tau)$ は未知の時間関数、 $\eta_r(\xi)$ は境界条件を満足する座標関数で $\beta=0$ のときのはりの固有振動形を用いる。

$$\eta_r(\xi) = \sum_{j=1}^n a_j^r \{1 - \cos(2j-1) \frac{\pi \xi}{2}\} \quad \text{ここに、} a_j^r: \text{定数} \quad (4)$$

式(2)にGalerkin法を適用すると、次のような時間に関する運動方程式に変換される。

$$[M]\{\ddot{f}(\tau)\} + ([K] - \alpha P^*[H] - \beta P^*[H] \cos \bar{\omega} \tau)\{f(\tau)\} = \{0\} \quad (5)$$

ここに、 $M_{ij} = \int_0^1 m(\xi) \eta_i(\xi) \eta_j(\xi) d\xi$, $G_{ij} = \int_0^1 S(\xi) T(\xi) \eta_i''(\xi) \eta_j''(\xi) d\xi$

$$H_{ij} = \int_0^1 \eta_i'(\xi) \eta_j'(\xi) d\xi, R_{ij} = \int_0^1 \eta_i(\xi) \eta_j(\xi) d\xi, [K] = [G] + k_s^*[H] + k_e^*[R]$$

式(5)は連立のMathieuの方程式で、 $\bar{\omega} = 2\omega_i/k$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$)の単純共振と $\bar{\omega} = (\omega_i + \omega_j)/k$ の結合共振は、文献2)の方法を用いて得ることができ、式(5)において $\beta=0$ とすれば一定軸力 α を受けるはりの無次元固有振動数 ω_1^* が得られ、式(5)において時間の項を無視すれば、無次元座屈荷重 p_1^* が求められる。

3. 数値結果 (1)固有振動特性 図-2 ($\alpha^*=2.0, \beta^*=1.0$)は、無次元固有振動数 ω_1^* と温度勾配 δ との関係を無次元弾性基礎定数 k_e^* と、無次元せん断層定数 k_s^* をパラメーターにして示したものである。式(4)の級数の項数は、10を採用している。図のように温度勾配が大きくなれば、振動数が低下し、この割合は高次ほど大きくなる。また、弾性基礎定数、およびせん断層定数は、振動数を増加させる。

(2)座屈特性 図-3 ($\alpha^*=2.0, \beta^*=1.0$)は、無次元座屈荷重 p_1^* と温度勾配 δ との関係をPasternak基礎パラメーターを用いて示したものである。図-2と同様なパラメーターの影響を受ける。

(3)不安定領域 図-4, 5 ($\alpha^*=2.0, \beta^*=1.0, \delta=0.0, \alpha=0.5$)は、3次振動まで考慮にしたときのPasternak基礎がない場合($k_e^*=0.0, k_s^*=0.0$)と、ある場合($k_e^*=2.0, k_s^*=2.0$)の2ケースに対する不安定領域を示したものである。図中の縦軸は、変動軸力の振幅 β を、横軸は、 $\alpha=0$ のときの1次の固有振動数で無次元化した励振振動数 $\bar{\omega}$ である。図のように、弾性基礎定数、せん断層定数は、不安定領域の現われる振動数および幅を変える。また、文献1)の方法では求められていない結合共振が、存在している。したがって、本題の不安定領域を求めるためには、従来の単純共振のみ求める方法では不十分である。

(4)既往の研究との比較 文献1)の研究と比較すると、3つの振動数、座屈曲線および不安定領域にかなり差異が認められたが、これは文献1)の研究の解析で、 $[K]=[G]-k_s^*[H]+k_e^*[R]$ と、しているためである。また、文献1)の研究の5項近似では、精度が不足していることが確認される。

4. まとめ 本研究によって従来の研究では、項数が不足し、不安定領域には無視できない広さの結合共振が、存在していることを明らかにした。また、解析ミスのために、せん断層による片持ちばりへの効果も、従来のものではおかしいということを示した。したがって、不安定領域を明らかにするには、本論の解法によらなければならない。

参考文献

- 1) R.C.Kar and T.Sujata: Computers & Structures, Vol.29, No.4, pp.591~599, 1988.
- 2) K.Takahashi: Journal of Sound and Vibration, Vol.85, pp.257~262, 1982.

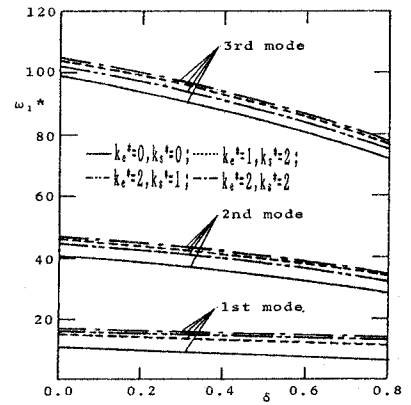


図-2 ω_1^* と δ の関係

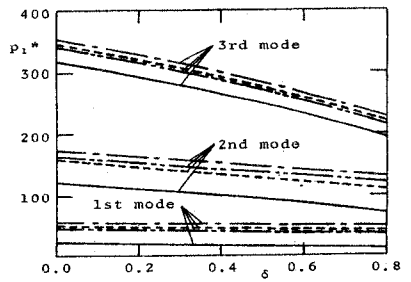


図-3 p_1^* と δ の関係

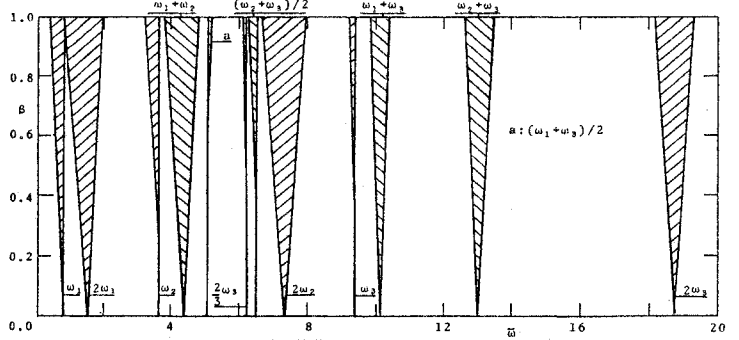


図-4 不安定領域図 ($k_e^*=0.0, k_s^*=0.0$)

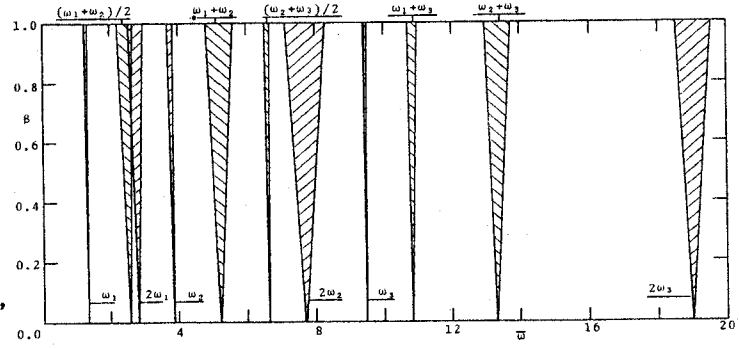


図-5 不安定領域図 ($k_e^*=2.0, k_s^*=2.0$)