

I-433 吊床版橋の面内、面外モードの固有振動数の近似解

東京大学大学院 学生員 比江島 慎二
 東京大学大学院 学生員 原口 一哉
 東京大学 正員 藤野 陽三

1. まえがき：吊床版橋とは、薄いコンクリート床版に何本かのケーブルで張り渡した帯状の橋梁であり、その景観的優位性、経済性、施工の簡便さもあり、山岳橋梁を中心に使われる例が増えている。吊床版橋では可とう性でその動特性が大きなポイントの1つになる。動特性は、三次元骨組構造により求めることができる¹⁾が、質量や剛性、サグ、ケーブル本数といったパラメータと振動数の対応関係が把握できないなどの欠点も有する。そこで本研究では、吊床版橋構造を面内変形に対してはケーブル及び梁構造、面外変形に対しては曲がり梁構造と見なすことにより、エネルギー法を用いて、固有振動数算定式を簡な形で求めることを試みた。

2. 力学的エネルギー：

(1) ひずみエネルギー：ひずみエネルギーは床版断面図心から n 本目ケーブルのひずみエネルギー V_{sn} とコンクリート床版の面内変形及び面外変形によるひずみエネルギー V_{cl} 、 V_{cII} を用いて次のようになる。

$$V = \sum_{n=1}^N V_{sn} + V_{cl} + V_{cII} \quad \text{ただし、} N \text{ はケーブル本数。}$$

V_{sn} , V_{cl} , V_{cII} はケーブル理論、梁理論及び曲がり梁理論²⁾に基づいて次のように求められる。

$$V_{sn} = \frac{1}{2} E_s A_s L \bar{\epsilon}_{sn}^2 + \frac{1}{2} \frac{H}{N} \int_0^L [(u_{0x} - d_n v_{0xx})^2 + v_{0x}^2 + (w_{0x} + d_n \theta_x)^2] dx, V_{cl} = \frac{1}{2} E_c A_c L \bar{\epsilon}_c^2 + \frac{1}{2} E_c I_y \int_0^L w_{0xx}^2 dx$$

$$V_{cII} = \frac{1}{2} \int_0^L [E_c I_z (v_{0xx}^2 + \frac{1}{R^2} \theta^2 + \frac{2}{R} v_{0x} \theta_x) + G_c J (\theta_x^2 + \frac{1}{R^2} v_{0x}^2 + \frac{2}{R} v_{0x} \theta_x)] dx$$

ただし、各記号の意味は表-1に示すとおりである。なお、添字 O は断面図心を、 $()_x$, $()_{xx}$ は x による1階、2階微分を表す。また、 $\bar{\epsilon}_c$, $\bar{\epsilon}_{sn}$ は軸方向に直ひずみ平均化されたことを意味する。

表-1 記号の説明

記号	意 味
$E_c(E_s)$	コンクリート（ケーブル）弾性係数
G_c	コンクリートせん断弾性係数
$A_c(A_s)$	コンクリート（ケーブル）断面積
$I_y(I_z)$	y (z) 軸まわりの断面二次モーメント
J	ねじり定数
L	スパン長
d_n	n 本目のケーブルの断面図心からの距離
R	吊床版橋の静的形状の曲率半径 ($=L^2/8/f$)
f	サグ（スパン中央の静的たわみ）
H	吊床版橋にかけられる張力
m	床版の単位長さ当り質量
Θ	床版の単位長さ当り極慣性
$\rho_c(\rho_s)$	コンクリート（ケーブル）密度

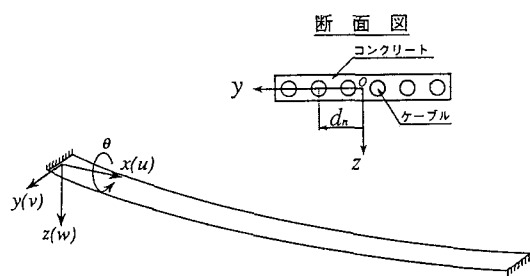


図-1 座標系

(2) 運動エネルギー：吊床版橋の運動エネルギーは変位を有する剛体運動と見なし、次のようになる。

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L [m (\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}_0^2) + \Theta \dot{\theta}^2 + \Theta_x \dot{v}_{0x}^2 + \Theta_y \dot{w}_{0x}^2] dx, \Theta_x = \rho_c I_z + \rho_s A_s \left(\sum_{n=1}^N d_n^2 \right), \Theta_y = \rho_c I_y$$

3. モード形：端部が剛結に近いことを考慮して、 s 次振動のモード形を次のように仮定する。

$$\psi_s(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - \cos \frac{2s\pi}{L} x) & (0 \leq x \leq \frac{L}{2s}) \\ \sin \frac{s\pi}{L} x & (\frac{L}{2s} \leq x \leq \frac{2s-1}{2s} L) \\ \frac{1}{2} (-1)^{s+1} (1 - \cos \frac{2s\pi}{L} x) & (\frac{2s-1}{2s} L \leq x \leq L) \end{cases} \quad (s=1,2,3,\dots)$$

4. 固有振動数：ラグランジェの方程式より得られた運動方程式を固有値解析することにより、次のような（s 次）固有振動数算定式が得られる。このとき鉛直は水平及びねじれと連成しないが、水平とねじれは互いに連成する。

$$f_w = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{ww}}{M_w}}, \quad f_{v,\theta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{K_{vv}}{M_v} + \frac{K_{\theta\theta}}{M_\theta} \pm \sqrt{\left(\frac{K_{vv}}{M_v} - \frac{K_{\theta\theta}}{M_\theta} \right)^2 + \frac{4K_{v\theta}^2}{M_v M_\theta}} \right]}$$

(鉛直振動) (水平・ねじれ連成振動)

ただし

$$M_v = \frac{4s-1}{8s} mL + \frac{s^2 \pi^2}{2L} \Theta_z, \quad M_w = \frac{4s-1}{8s} mL + \frac{s^2 \pi^2}{2L} \Theta_y, \quad M_\theta = \frac{4s-1}{8s} \Theta L$$

$$K_{ww} = \frac{1 + (-1)^{s+1}}{2} \frac{16f^2}{s^2 L^3} (E_c A_c + N E_s A_s) + \frac{s^2 \pi^2}{2L} \left(s(s+3) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 E_c I_y + H \right)$$

$$K_{vv} = \frac{s^2 \pi^2}{2L} \left\{ s(s+3) \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 (E_c I_z + \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n^2 \right) H) + \frac{64 f^2}{L^4} G_c J + H \right\}$$

$$K_{v\theta} = K_{\theta v} = \frac{4S^2\pi^2f}{L^3}(E_c I_z + G_c J)$$

$$K_{\theta\theta} = \frac{s^2\pi^2}{2L} (G_C J + (\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N d_n^2) H) + \frac{4s-1}{s} \frac{8f^2}{L^3} E_C I_z + \frac{1+(-1)^{s+1}}{2} \frac{16f^2}{s^2 L^3} (\sum_{n=1}^N d_n^2) E_s A_s$$

5. 数値解析例：得られた固有振動数算定式を用いて、烏山城C.C.歩道橋（スパン63m,栃木県）について解析した結果を表-2に示す。本法解は、有限要素解及び実測値に比較的近い値を示していることが分かる。なお、水平振動とねじり振動が連成するが、スパン中央のモード変位を有限要素法のと比較したのが図-2である。これも比較的有限要素解に近い。ひぐらし橋（スパン63m,愛媛県）における解析も行なったが、同様に、有限要素法及び実測値に近い固有振動数値が得られた。

表-2 固有振動数の比較（烏山城）

振動モード	本方法	有限要素法	実測値
鉛直たわみ			
対 称 1 次	1.63Hz	1.56Hz	1.50Hz
〃 2 次	1.98	2.25	2.17
逆対称 1 次	1.15	1.25	1.22
〃 2 次	2.88	3.04	3.08
ねじり - 水平連成			
連 成 1 次	2.39Hz	2.46Hz	2.54Hz
〃 2 次	3.43	3.46	3.31

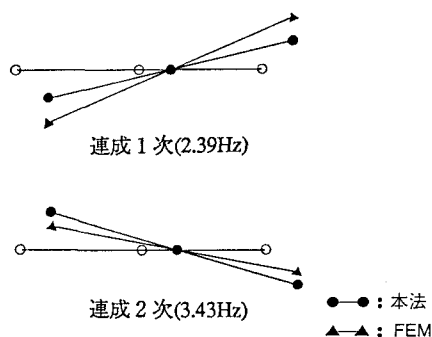


図-2 水平-ねじれ連成のモード変位 (スパン中央)

6. おわりに：今回得られた固有振動数算定式が、今後の吊床版橋の設計等において参考となれば幸いである。最後に、本研究にあたって、貴重な御助言及び御援助を頂いたオリエンタルコンクリート（株）の角本氏ならびに住友建設（株）の錦氏に深く謝意を表します。

＜参考文献＞ 1) 梶川、津村、角本：PC吊床版歩道橋の振動とその使用性、構造工学論文集、Vol.36A, 1990、
2) 土木学会編：構造力学公式集、1986