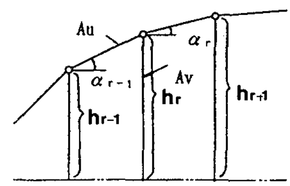
Ｉ-430　フーリエ定和分変換による梁の振動解析に関する研究

日大生産工　能町　純雄
日大生産工　阿部　忠
日大生産工　澤野　利章
日大大学院・生産工○畑野　義行

１．研究目的

動的荷重の取り扱いは橋梁などの構成部材の振動による疲労の影響，構造物に生じる振動数に係わる共振作用など土木構造物の設計には重要なものである。本研究は橋梁の動特性を考察するために，構造的に振動が比較的大きなランガー桁をモデルに選び，従来のマトリクスによる解法とフーリエ定和分変換による解法の各々の関係式を求め，これらの固有振動数と固有振動モードの比較検討を行うものとする。



図－１ランガー桁

２．解析方法

まず，アーチリブに作用する軸圧縮力の水平方向成分Hを不静定として解析すると，吊材の軸力Ｖｒは式 (1)となる。

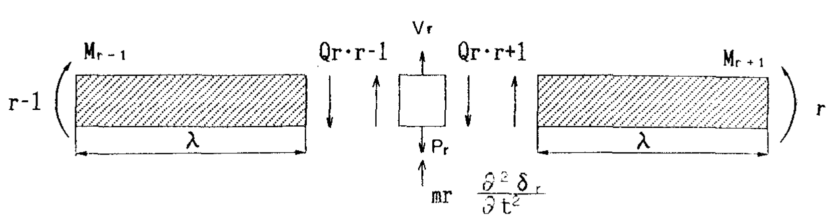
$$Vr = H(\tan\alpha_{r-1} - \tan\alpha_r) = -H\frac{8h}{n^2\lambda} = -HC \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここで，α_{r-1}, α_r:アーチリブの格点の角度，h ：垂距，λ：格間長，n:格間数，$C=8h/n^2\lambda$

次に，補剛桁を多径間連続桁として，任意の連続する３格点 r-1，r，r+1に対して三連モーメント法を適用する。すなわち，格点 rにおける左右のたわみ角が等しいとする条件式$\theta(r\cdot r-1)=\theta(r\cdot r+1)$から式 (2)を得る。

$$\frac{\lambda}{6EI}\left\{M_{r-1} + 4M_r + M_{r+1}\right\} = \frac{1}{\lambda}(\delta_{r+1} - 2\delta_r + \delta_{r-1}) \qquad \cdots\cdots(2)$$

ここで，　M_{r-1}，M_r，M_{r+1}:格点 r-1，r，r+1のモーメント　　E ：部材のヤング係数
　　$\delta_{r+1}, \delta_r, \delta_{r-1}$:格点 r-1，r，r+1のたわみ　　I ：補剛桁の断面二次モーメント



図－２　点ｒでの力のつり合い

さらに，式 (2)を差分記号で表すと式 (3)を得る

$$\frac{\lambda^2}{6EI}(\Delta^2 M_{r-1} + 6Mr) + \Delta^2\delta_{r-1} = 0 \qquad \cdots\cdots(3)$$

一方，補剛桁の任意格点 rにおける垂直力は垂直力のつり合い条件から式 (4)として得られる。

$$\therefore \quad \frac{M_{r+1} - 2M_r + M_{r-1}}{\lambda} = -P + Vr = 0 \qquad \cdots\cdots(4)$$

ここで，P は格点 rに作用する集中荷重で，格点集中荷重は面力と体力によるものであるから式 (5)として与えることができる。

$$P=P'_r - m_r \frac{\partial^2 \delta_r}{\partial t^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

ここで，Pr':面力，mr:格点 rの離散質量，t:時間

したがって，ランガー桁全体における水平方向変位のつり合い条件より以下の基本方程式(6)が得られる。

$$\frac{\lambda^2}{EI}(m_r \lambda \delta_r - HC\lambda) + \frac{mr\lambda^3}{6EI} \quad \Delta^2 \delta_{r-1} + \Delta^2 \Delta^2 \delta_{r-2} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

ここで，式 (4)を差分表示すると式 (7)が得られる。

$$\frac{\Delta^2 M_{r-1}}{\lambda} - m_r \frac{\partial^2 \delta_r}{\partial t^2} + HC = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

また，H は式 (8)によって表すことができるので式 (9)が得られる。

$$H = -\frac{EAu}{\lambda \Psi} C \sum_{i=1}^{n-1} \delta_r \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

$$\frac{1}{\lambda}(-M_{r+1} + 2M_r - M_{r-1}) - m_r \omega^2 \delta_r + \frac{EAu}{\lambda \Psi} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_r = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

ここで $\quad \Psi = \sum_{r=1}^{n} \left\{ 1 + 16\left(\frac{h}{\ell}\right)^2 \left(1 - \frac{2r-1}{n}\right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}} + \frac{Au}{Av} \frac{128}{3} \left(\frac{h}{\ell}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{EAu}{EAg} n$

$Di = 2\left(1 - \mathrm{Cos}\frac{i\pi}{n}\right)$ ，Ag:下弦材の断面積 ，E : 部材のヤング係数

Au : 上弦材の断面積 ，Av: 吊材の断面積 ，ℓ : 支間

以上より式 (7)に式 (2)を代入してマトリクス表示させ固有円振動数を求める。また，式 (6)にフーリエ定和分変換を用いることによって次式が得られる。

$$\delta i\,(P^2 + Di^2/(Di-6)) + \frac{12}{n} \cdot \frac{(1-(-1)^i)\mathrm{Sin}\frac{i\pi}{n}}{Di(Di-6)} \frac{EAuC^2\lambda^2}{6E_g I \Psi} \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i \frac{(1-(-1)^i)\mathrm{Sin}\frac{i\pi}{n}}{Di}$$

$$= 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

ここで，解析例として14各間から成る場合を想定すると式(10)によって13行13列のマトリクスがえられ，それによって固有円振動数が求められる。

３．結果及び考察

これらより求められた，各々の固有マトリクスを既成のＥＢＥＲＬＮ法によって固有振動数および固有振動モードを求めることとした。ただ，フーリエ定和分変換を行ったマトリクスは式の性質上，i が偶数の時 0になるので，数学的にマトリクスの縮小を行えるため計算の簡略化を図ることができる。

以上により求められた固有円振動数ωは，RAD/sec の単位でほぼ小数第 2～3 位に多少の誤差をみるにとどまり実際上無視できる範囲と考えられる。また，固有振動モードについても同様な波形が得られることにより実際上このフーリエ定和分変換による方法で解析を行っても差し支えないと考えられる。