

佐藤鉄工(株) 正員 ○勝俣 徹、安田正明
長岡技術科学大学 正員 長井正嗣

1. まえがき

近年、斜張橋は益々長大化の傾向にあり、その動特性を正確に把握することが設計上重要な課題となる。とくに、動的応答の予測にあたっては固有値解析に基づくモード解析法が重要な役割を果たすことが知られており、複雑な振動性状を正確に把握しておくことが重要となる。

さて、斜張橋の主桁(1軸対称断面)に着目すると、我国では、主に耐風安定性に対する配慮から箱閉断面が選ばれる。この場合、桁重心、せん断中心位置の差は小さいが、後死荷重部材の存在のため、ねじれと横曲げの連成振動系となる。また開断面桁の場合には重心、せん断中心位置の差によって連成振動系となる。この他に縦断勾配、ケーブルの取り付けにも起因して連成振動系が予想される。本文では、そりねじれ理論に基づき、1本の棒部材で重心、せん断中心の差、また後死荷重のような主構以外の部材が考慮できるFEMによる斜張橋用の立体解析プログラムを作成し、主に固有値、モード形に与える前述の影響を検討してみる。

2. 基礎理論¹⁾

図-1に示す薄肉断面はりの断面内の任意点の変位を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_s(z) - (y - y_s) \phi(z), & v(x, y, z) &= v_s(z) + (x - x_s) \phi(z) \\ w(x, y, z) &= w_s(z) - x u_s'(z) - y v_s'(z) - \omega_s(x, y) \phi'(z) \end{aligned} \quad (1)_{a, b, c}$$

ここで、添字 s はせん断中心に関する量、 ω は単位そり、 $()'$ は z に関する一階微分を表わす。

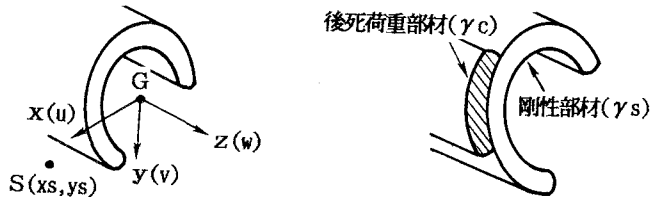


図-1 座標系と変位

次に、運動エネルギー、ポテンシャルエネルギーを定義し、式(1)を代入する。はり軸方向変位を1次関数、その他変位を3次関数で近似して、Hamiltonの原理を適用すると、1軸対称断面桁に対して以下の質量連成の振動方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} (\gamma_s A_{0q}/g) \int \{M\}^T \{M\} dz & & & \\ & (\gamma_s A_{0q}/g) \int \{N\}^T \{N\} dz & & (\gamma_s I_u/g) \int \{N\}^T \{N\} dz \\ & & (\gamma_s A_{0q}/g) \int \{N\}^T \{N\} dz & \\ & (\gamma_s A_{0q}/g) \int \{N\}^T \{N\} dz & & (\gamma_s I_p/g) \int \{N\}^T \{N\} dz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{w}_s \\ \ddot{u}_s \\ \ddot{v}_s \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} EA \int \{M''\}^T \{M''\} dz & & & \\ & EI_y \int \{N''\}^T \{N''\} dz & & \\ & & EI_x \int \{N''\}^T \{N''\} dz & \\ & & & EI_w \int \{N''\}^T \{N''\} dz + GJ \int \{N'\}^T \{N'\} dz \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_g \\ u_s \\ v_s \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_z \\ f_x \\ f_y \\ f_t \end{Bmatrix} \quad (2) \end{aligned}$$

$$A_{eq} = \int dA + (\gamma_1/\gamma_s) \int dA_1, \quad G_x = \int y dA$$

$$H_u = \gamma_s A_{eq} - (\gamma_1/\gamma_s) G_{x1}$$

$$I_p = I_x + I_y + (\gamma_1/\gamma_s)(I_{x1} + I_{y1}) - 2\gamma_s G_{x1} + \gamma_s^2 A_{eq} \quad (3)_{a,b,c,d}$$

ここで、 $\{M\}$ 、 $\{N\}$ はそれぞれ z 座標に関する 1 次、3 次の変位関数より成るベクトル、 EA は桁の伸び剛性、 EI_x 、 EI_y は x 、 y 軸まわりの曲げ剛性、 EI_w はそり（曲げ）ねじれ剛性、 GJ は純ねじれ剛性、 I_p は極慣性モーメント、 f は外力、 g は重力加速度、 $()$ は時間微分、 $\{ \}^T$ はベクトルの転置、添字 1 は桁の伸び、曲げ、ねじれ剛性に寄与しない後死荷重部材に関する量を表わす。

さらに、せん断中心軸で全ての変位を取り扱うために座標変換操作を施すとせん断中心位置にはり部材を設けた骨組モデルが得られる。

固有振動数、モード形が得られれば、それぞれのモードに対応した独立の振動方程式が得られる。ここでは、はりの曲げ、ねじれ連成振動の i 次の等価質量 (M_i^*) を定義しておく。

$$M_i^* = (\gamma_s / g) \int_z (I_p \dot{\xi}_i^2 + 2 H_u \dot{\xi}_i \dot{\eta}_i + A_{eq} \dot{\eta}_i^2) dz \quad (4)$$

ここで、 ξ_i 、 η_i はそれぞれねじれ、曲げの i 番目振動モード形を表わす。また、モード間の直交条件は以下の通りである。

$$\int_z \{ I_p \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j + H_u (\dot{\xi}_i \dot{\eta}_j + \dot{\eta}_i \dot{\xi}_j) + A_{eq} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j \} dz = 0 \quad (5)$$

次に、斜張橋への適用を説明する。図-2 に示す剛なはり部材を取り付けて、ケーブルと連結する。このとき、図中の“a”点の自由度は縮約される。

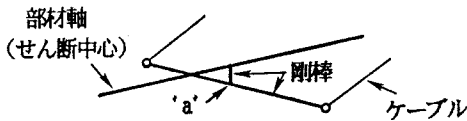
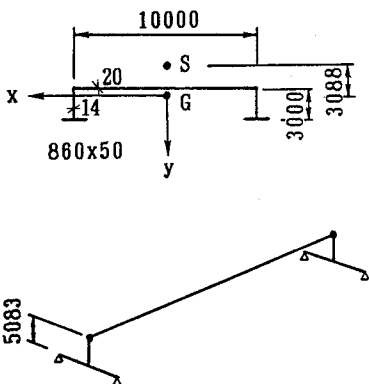


図-2 骨組

数値計算例

図-3 に示す、単純支持の 1 軸対称開断面桁（支間 60 m）の固有値解析を行い、sin 波を用いた解との比較を行う。表-1 にその結果を示すが、() 内数値は非連成とした場合の固有振動数を表わす。表より、本法によって十分な精度で固有値解析が可能であることがわかる。



$A \text{ (m}^2\text{)}$	0.364
$A_{eq} \text{ (m}^2\text{)}$	0.364
$I_x \text{ (m}^4\text{)}$	0.604
$I_y \text{ (m}^4\text{)}$	5.771
$J \text{ (m}^6\text{)}$	1×10^{-4}
$I_w \text{ (m}^6\text{)}$	9.871
$H_u \text{ (m}^3\text{)}$	-1.112
$I_p \text{ (m}^4\text{)}$	9.835

表-1 比較 (HZ)

	sin波	FEM	
		4-要素	8-要素
T1(H)	2.21 (2.24)	2.21	2.21
T2(H)	8.85 (8.95)	8.88	8.85
H1(T)	11.18 (8.90)	11.17	11.17
T3(H)	19.91 (20.14)	20.27	19.93
T4(H)	35.40 (35.81)		35.53
H2(T)	44.70 (35.58)		44.60
T5(H)	55.32 (55.96)		57.79
T6(H)	79.66 (80.58)		81.03

T(H) : ねじれ振動(水平の連成)
H(T) : 水平振動(ねじれの連成)

図-3 計算モデル（開断面）

斜張橋について、1 軸対称の開断面桁のねじれの固有値解析を行った。前述の各種の影響は振動モード形に影響を与えるものの、振動数そのものへの影響は小さい。詳細については、講演当日に報告したい。

参考文献 川井忠彦：マトリックス法振動および応答、コンピュータによる構造工学講座、1971