I-381　はりとトラスの形状最適化と変分原理

八戸工業大学　正会員　長谷川　明

１．はじめに

構造物の形状がどのようであると最適であるかを検討する形状最適化問題がある。この形状最適化問題では，変分原理に基づく方法を応用した研究がなされている[1)-2)]. 通常使われる変分原理は，体積一定の付帯条件をつけたポテンシャルエネルギー汎関数から，形状が決定している物体の挙動に関する変数の変分を考察しているのに対し，ここで述べる変分原理は，形状に関する不変量，例えば体積，を規定して物体の挙動を表現する変数の他に，形状を表現する変数をも考慮しているため，逆変分原理（Inverse Variational Principles）と呼ばれることがある.

本文は，はりやトラスの形状最適化問題を変分原理から考察したものである.

２．連続体の形状最適化と逆変分原理

体積一定のもとでポテンシャルエネルギーを最小とする連続体の形状を決定するための汎関数は，

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}dV - \int_V b_i u_i dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i dS + \lambda(\int_V dV - V_0) \qquad (1)$$

と示される．ここで，σ_{ij}，ε_{ij} は応力およびひずみテンソルの成分，b_iは単位体積当りの物体力，T_iは表面力，u_iは変位，λはラグランジェの乗数，V_0 は付帯条件の一定体積，Vは連続体の領域，Sは連続体の境界表面，S_σは表面力が作用している境界である.（１）式の変分を取ることにより，次の４式が得られる.

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial xj} - b_i = 0 \qquad in \qquad V \qquad (2)$$

$$\sigma_{ij}n_j - T_i = 0 \qquad on \qquad S_\sigma \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + \lambda = 0 \qquad on \qquad S_x \qquad (4)$$

$$\int_V d_V - V_0 = 0 \qquad (5)$$

(2) 式は領域内の平衡方程式，(3) 式は表面力が作用している境界 S_σにおける荷重条件式，(5) 式は体積一定の付帯条件式である．最適な形状を求めるための方程式である (4) 式から，最適形状であるためには，移動可能境界 S_x において，ひずみエネルギー密度 $W(=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})$ が一定でなければならないことを示しており，この時ラグランジェ乗数λはこの一定とするひずみエネルギー密度 Wと$\lambda = -W$の関係がある.　田村[1)] は，移動可能境界 S_xにおけるひずみエネルギー密度を一定化するための数値解析法を示している.

３．はりの形状最適化と変分原理

はりの理論の場合には，(1) 式の汎関数は，

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^l [EI(\frac{d^2w}{dx^2})^2 - 2qw]dx + \lambda(\int_V d_V - V_0) \qquad (6)$$

となる．ここで，EIは曲げ剛性，wはたわみ，qは分布荷重である．いま，はりの断面２次モーメント Iが断面積 A で

$$I = aA^b \qquad (7)$$

と表現される時[3)]，(6) 式の変分から

$$\frac{d^2}{dx^2}(EI\frac{d^2w}{dx^2})^2 - q = 0 \qquad (8)$$

$$(\frac{d^2w}{dx^2})^2 + \frac{\lambda}{abEA^{b-1}} = 0 \qquad (9)$$

$$\int_0^l Adx - V_0 = 0 \qquad (10)$$

が求まる．はりの場合は，表面に縁応力σだけが発生しているので，

$$W = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} \qquad (11)$$

となる．このため，ひずみエネルギー密度が一定であることは縁応力が一定であることを意味し，いわゆる”平等強さばり”が最適形状であることを示す.

そこで，その一定縁応力をσ_0 とし，断面を上下対称と考え中立軸から縁までの距離を yとすると，はりの曲げ応力の公式から

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{\sigma_0}{Ey} \qquad (12)$$

が得られ，(9) 式と同様な関係が得られる.

例えば，図１に示す片持ちばりに等分布荷重がかかるときは，$M=-\frac{1}{2}qx^2$であるから，

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M}{EI}$$

の関係に代入すると，(9) 式から

$$A=(\frac{q^2x^4}{4aE\lambda})^{\frac{1}{b+1}} \tag{13}$$

のように断面積を変化させればよいことになる．ここで，薄肉箱型断面では $b=3$ であるから，断面積 A は座標 x に比例すると最適な形状となり，充実断面の時は $b=2$ であるから[3]，断面積は $x^{\frac{4}{3}}$に比例すると最適形状となることが示されている．なお，この時，(9) 式と (12) 式の関係と，ひずみエネルギー密度 $W=-\lambda$から，

$$y^2=2abA^{b-1} \tag{14}$$

となる関係が生まれる．

４．トラスの形状最適化と変分原理

ここでは，簡単に設計変数が部材断面積 A_iと部材角θ_iであるトラスの最適形状を考えることとし，部材の伸びΔl_iは節点変位 u_i，v_iと部材角θ_iで，次のように表現されているものとする．

$$\Delta l_i=-(u\cos\theta_i+v\sin\theta_i) \tag{15}$$

１）ポテンシャルエネルギーを最小とする形状

このための汎関数はヤング率 E_i，部材長 l_i，ラグランジェ乗数λおよび体積一定値 V_0を使って，

$$\Pi=\Sigma\frac{E_iA_i}{2l_i}(\Delta l_i)^2-pu+\lambda(\Sigma A_il_i-V_0) \tag{16}$$

と表現される．この式から，変位と形状を決定する変数の変分をとると，前者からはつりあい方程式，後者からは最適形状を決定するための方程式が導かれ，この問題は簡単なトラスの場合，両者の連立方程式を解くことによって求めることができる．

２）体積を最小とする形状

一方，この場合の汎関数は，一定とするポテンシャルエネルギーを U_0とすると

$$\Pi^*=\Sigma A_il_i+\lambda^*\{\Sigma\frac{E_iA_i}{2l_i}(\Delta l_i)^2-pu-U_0\} \tag{17}$$

となる．この式から，１）と同じ変位と形状を決定する変数の変分をとると，やはり前者からはつりあい方程式，後者からは最適形状を決定するための方程式が導かれ，本問題も，１）と同様に両者の連立方程式を解くことによって求めることができる．

３）まとめ

両者の変分から得られる方程式を検討すると，次のようなことが示された．a) 両者の最適形状は全部材のひずみエネルギー密度が等しいことが条件となっており，各部材の弾性係数が等しいときは，応力の絶対値は一致する必要がある．b)$\lambda^*=1/\lambda$とすれば，両者の最適解は一致する．

５．おわりに

本文は，変分原理を使って形状最適化，特にはりやトラスの形状最適化を考察したものである．一般に構造の最適化は，与えられた形状から変位や応力を計算する構造解析と数理計画的手法などの最適化に分離して，この２つを繰り返すことで作業している．すなわち，大きな２段階最適化を行っていると考えられる．このような２段階に分離した最適化では，通常，初期形状を与え構造解析を行い制約を満たし目的を最適とする形状を求めていく方法がとられるが，逆に変位を与えて逆構造解析を行い，逆な進め方をする２段階最適化があることを示していると思われるが，これについては今後の課題としたい．

参考文献

1) 田村武，小林昭一：連続体の形状最適化に関する基礎的研究，システム最適化に関するシンポジウム講演論文集,pp.155-160,1989

2) Horak:Inverse variational Principle of Continuum Mechanics,1969,Rozpravy Ceskoslovenske Akademie Ved

3) 長谷川明：最適トラス部材の断面積と断面２次モーメントの関係，昭和61年度土木学会東北支部技術研究発表会講演概要，1987

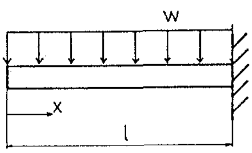

図１　片持ちばり