

I-375

骨組構造物の固有値・固有ベクトルの感度係数特性

東洋大学 正員○新延 泰生 東京電気大学 正員 松井 邦人
 国士館大学 正員 菊田 征勇 東洋大学 学生員 木村 淳

1. はじめに

本研究は、骨組構造物の固有値・固有ベクトルの感度解析について再度検討を行い、各次数の感度係数の間に存在する特別な関係を誘導した。その関係式が変数の選択の仕方により異なり、断面変更後の固有値・固有ベクトルの推定精度の善し悪しの判断に供している。

2. 固有値問題の感度解析¹⁾

多自由度系の固有値問題は、マトリックス表示を用いて次のように表す事ができる。

$$K(X)Y_r = \lambda_r M(X)Y_r \quad (1)$$

ここに、 $K(X)$ および $M(X)$ は、それぞれ $n \times n$ の剛性マトリックスおよび質量マトリックスである。 Y_r は $n \times 1$ のベクトルで r 番目の固有ベクトルを表し、 λ_r は r 番目の固有値を表す。また、 X は $m \times 1$ の感度変数（感度解析に用いる変数を、設計に関する変数と区別する意味で、ここでは感度変数と呼ぶ事にする）ベクトルである。固有ベクトル Y_r は次の直交条件式を満足するものとする。

$$Y_r^T M(X) Y_r = 1 \quad (2)$$

固有円振動数 $\omega_r = \lambda_r^{1/2}$ の感度変数 X_1 に対する1次の感度係数は、式(1)を X_1 で偏微分し、式(2)の直交条件式を用いて求められる。また2次以上の感度係数 $\partial^2 \omega_r / \partial X_1 \partial X_j$ 、 $\partial^3 \omega_r / \partial X_1 \partial X_j \partial X_k$ 、…は、更に感度変数 X_j 、 X_k 、…で偏微分する事により求められる。一方、固有ベクトル Y_r の1番目の成分 Y_{r1} の感度係数は、固有ベクトルを用いて展開し、式(1)、(2)を感度変数でそれぞれ偏微分することにより得られる。

3. 感度係数特性

2. より得られた感度係数より無次元化感度係数の骨組構造物全体の総和、即ち、 $\sum_i (\partial \omega_r / \partial X_i) X_i / \omega_r$ 、 $\sum_i \sum_j (\partial^2 \omega_r / \partial X_i \partial X_j) X_i X_j / \omega_r$ 等を計算する定数となり、それらの値は感度変数として I 、 $R_1 = 1/I$ 、 A 、 $R_A = 1/A$ 、 $I^{1/4}$ 、 $I^{-1/4}$ とした場合表-1及び表-2のように整理される。尚、表には3次の感度次数まで記されているが、任意の感度次数に対して表現が可能である。

$X_j) X_i X_j / \omega_r$ 、 $\sum_i \sum_j \sum_k (\partial^3 \omega_r / \partial X_i \partial X_j \partial X_k) X_i X_j X_k / \omega_r$ 、 $\sum_i (\partial Y_{r1} / \partial X_i) X_i / Y_{r1}$ 、 $\sum_i \sum_j (\partial^2 Y_{r1} / \partial X_i \partial X_j) X_i X_j / Y_{r1}$ 、 $\sum_i \sum_j \sum_k (\partial^3 Y_{r1} / \partial X_i \partial X_j \partial X_k) X_i X_j X_k / Y_{r1}$ 等を計算する定数となり、それらの値は感度変数として I 、 $R_1 = 1/I$ 、 A 、 $R_A = 1/A$ 、 $I^{1/4}$ 、 $I^{-1/4}$ とした場合表-1及び表-2のように整理される。尚、表には3次の感度次数まで記されているが、任意の感度次数に対して表現が可能である。

表-1 固有円振動数 ω_r の無次元化感度係数の骨組全体に対する総和の値

感度 次数	感度変数 X				
	I	$R_1 = 1/I$	A	$R_A = 1/A$	$I^{1/4}$
1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
2	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	0
3	$-\frac{21}{64}$	$-\frac{45}{64}$	$-\frac{3}{8}$	$-\frac{15}{8}$	0

表-2 固有ベクトル Y_r の k 番目の成分 Y_{rk} の無次元化感度係数の骨組全体に対する総和の値

感度 次数	感度変数 X				
	I	$R_1 = 1/I$	A	$R_A = 1/A$	$I^{-1/4}$
1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
2	$-\frac{5}{16}$	$-\frac{3}{16}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0
3	$-\frac{45}{64}$	$-\frac{21}{64}$	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{3}{8}$	0

表-1で感度変数 X を逆変数 $R_X = 1/X$ としたものが表-2となっていることが注目される。

4. 感度変数と固有値・固有ベクトルの推定誤差

感度変数 X が $X = X_0$ (原系) より $X = X_0 + \delta X$ へ変動するとき、変動後の r 番目の固有円振動数 ω_r と原系における固有円振動数 ω_{0r} との比は式(3)のように示される。

今、 $X_i = s_i X_{0i}$ 、 $X_j = s_j X_{0j}$ 、 $X_k = s_k X_{0k}$ と表し、 $s_i = s_j = s_k = s$ (i, j, k

$$\begin{aligned} \frac{\omega_r}{\omega_{0r}} = & 1 + \sum_{i=1}^m \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial X_i} \right]_0 \frac{X_i - X_{0i}}{\omega_{0r}} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\frac{\partial^2 \omega_r}{\partial X_i \partial X_j} \right]_0 \frac{(X_i - X_{0i})(X_j - X_{0j})}{\omega_{0r}} \\ & + \frac{1}{6} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left[\frac{\partial^3 \omega_r}{\partial X_i \partial X_j \partial X_k} \right]_0 \frac{(X_i - X_{0i})(X_j - X_{0j})(X_k - X_{0k})}{\omega_{0r}} \quad (3) \end{aligned}$$

$= 1, 2, \dots, m)$ の場合を考える。即ち、骨組全体について感度変数 X を sX とした場合の固有振動数比 ω_r/ω_{or} を考える。ここでは感度変数として 1) I 、2) $R_I = 1/I$ 、3) A 、4) $R_A = 1/A$ 、5) $I^{1/4}$ の各々を考えた時の固有振動数比 ω_r/ω_{or} がどのように相違するかを検討する。 s としては感度変数として断面積 A を考えた場合 3) を基準とし $s = A/A_0$ とする。ただし A_0 は原系の断面積を示す。また I と A との間の関係式 $I = \alpha A^2$ において $\alpha = 1$ としている。以上から各感度変数に対する断面変更後の固有振動数比 ω_r/ω_{or} は次のように示される。

1) $X = I$ の場合

$$\frac{\omega_r}{\omega_{or}} = 1 + \frac{1}{4} (s^2 - 1) - \frac{5}{32} (s^2 - 1)^2 + \frac{7}{128} (s^2 - 1)^3 \quad (4)$$

2) $X = R_I = 1/I$ の場合

$$\frac{\omega_r}{\omega_{or}} = 1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{s^2} - 1\right) + \frac{5}{32} \left(\frac{1}{s^2} - 1\right)^2 - \frac{15}{128} \left(\frac{1}{s^2} - 1\right)^3 \quad (5)$$

3) $X = A$ の場合

$$\frac{\omega_r}{\omega_{or}} = 1 + \frac{1}{2} (s - 1) - \frac{1}{8} (s - 1)^2 + \frac{1}{16} (s - 1)^3 \quad (6)$$

4) $X = R_A = 1/A$ の場合

$$\frac{\omega_r}{\omega_{or}} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - 1\right) + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{s} - 1\right)^2 - \frac{5}{16} \left(\frac{1}{s} - 1\right)^3 \quad (7)$$

5) $X = I^{1/4}$ の場合

$$\frac{\omega_r}{\omega_{or}} = s^{1/2} \quad (8)$$

表-3 ω_r/ω_{or} (その1)

s		ω_r/ω_{or}				
		I	R_I	A	R_A	$I^{1/4}$
1.1	1次	1.0525	1.0434	1.0500	1.0455	1.0488
	2次	1.0484	1.0481	1.0488	1.0486	1.0485
	3次	1.0485	1.0487	1.0488	1.0488	1.0488
1.2	1次	1.1100	1.0746	1.1000	1.0835	1.0954
	2次	1.0919	1.0916	1.0950	1.0938	1.0954
	3次	1.0965	1.0943	1.0955	1.0952	1.0954
1.3	1次	1.1725	1.1021	1.1500	1.1154	1.1402
	2次	1.1279	1.1281	1.1308	1.1354	1.1402
	3次	1.1458	1.1361	1.1404	1.1392	1.1402
1.4	1次	1.2400	1.1224	1.2000	1.1429	1.1832
	2次	1.1516	1.1599	1.1800	1.1735	1.1832
	3次	1.2020	1.1737	1.1840	1.1808	1.1832
1.5	1次	1.3125	1.1389	1.2500	1.1647	1.2247
	2次	1.1669	1.1871	1.2108	1.2083	1.2247
	3次	1.2728	1.2072	1.2264	1.2199	1.2247
1.6	1次	1.3900	1.1523	1.3000	1.1875	1.2649
	2次	1.1619	1.2104	1.2350	1.2402	1.2649
	3次	1.2695	1.2369	1.2695	1.2547	1.2649
1.7	1次	1.4725	1.1635	1.3500	1.2059	1.3038
	2次	1.1376	1.2393	1.2888	1.2695	1.3038
	3次	1.3060	1.2631	1.3102	1.2913	1.3038
1.8	1次	1.5600	1.1728	1.4000	1.2232	1.3416
	2次	1.0896	1.2475	1.3200	1.2963	1.3416
	3次	1.2643	1.2862	1.3520	1.3217	1.3416
1.9	1次	1.6525	1.1807	1.4500	1.2368	1.3784
	2次	1.0139	1.2624	1.3400	1.3210	1.3784
	3次	1.0842	1.3067	1.3943	1.3542	1.3784
2.0	1次	1.7500	1.1875	1.5000	1.2500	1.4142
	2次	0.9663	1.2754	1.3750	1.3438	1.4142
	3次	1.2828	1.3248	1.4375	1.3828	1.4142

表-4 ω_r/ω_{or} (その2)

s		ω_r/ω_{or}				
		I	R_I	A	R_A	$I^{1/4}$
1.0	1次	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	2次	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	3次	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.9	1次	0.9525	0.9414	0.9500	0.9444	0.9487
	2次	0.9491	0.9500	0.9488	0.9491	0.9487
	3次	0.9487	0.9484	0.9487	0.9486	0.9487
0.8	1次	0.9100	0.8594	0.9000	0.8750	0.8944
	2次	0.8979	0.9088	0.8950	0.8994	0.8944
	3次	0.8953	0.8880	0.8945	0.8936	0.8944
0.7	1次	0.8725	0.7398	0.8500	0.7857	0.8366
	2次	0.8461	0.9091	0.8368	0.8546	0.8366
	3次	0.8409	0.7769	0.8371	0.8300	0.8366
0.6	1次	0.8400	0.5556	0.8000	0.6667	0.7746
	2次	0.8016	1.0494	0.7800	0.8333	0.7746
	3次	0.7873	0.3999	0.7764	0.7407	0.7746
0.5	1次	0.8125	0.2500	0.7500	0.5000	0.7071
	2次	0.7508	1.6563	0.7100	0.8750	0.7071
	3次	0.7367	-1.5076	0.7109	0.5625	0.7071
0.4	1次	0.7900	-0.3125	0.7000	0.2500	0.6325
	2次	0.7239	3.9941	0.6550	1.0938	0.6325
	3次	0.6914	-12.9633	0.6415	0.0391	0.6325
0.3	1次	0.7725	-1.5278	0.6500	-0.1667	0.5477
	2次	0.6649	14.4464	0.5888	1.8750	0.5477
	3次	0.6537	-106.0909	0.5673	-2.6949	0.5477
0.2	1次	0.7668	-5.0000	0.6000	-1.0000	0.4472
	2次	0.6736	85.0000	0.5200	5.0000	0.4472
	3次	0.6252	-671.9000	0.4880	-15.0000	0.4472
0.1	1次	0.7525	-23.7500	0.5500	-3.5000	0.3162
	2次	0.6606	1507.6563	0.4488	26.8750	0.3162
	3次	0.6076	-11219.2578	0.4032	-200.9375	0.3162

s として 1.0 (原系) を境に 0.1 刻みで、0.1 $\leq s \leq 2.0$ の範囲における ω_r/ω_{or} の値を表-3 および表-4 に示す。表-3 は断面積を減少させた場合であり、表-4 は逆に増加させた場合に相当する。感度係数が 5) $I^{1/4}$ の場合は表-1 で感度次数が 2 以上で 0 となることから 1 次の項まで厳密解と一致する。表-3、4 全般から固有円振動数 ω_r の推定値の精度は、考慮する感度変数としては 5) $I^{1/4}$ が最善で、次いで 3) A が良い事が分かる。特に断面積を減少させる場合で感度変数を R_I 、 R_A とすると推定値が振動し、高次の項まで考慮しても推定値の精度が向上しないことを示している。

一方、固有ベクトルの推定値については、3. で述べた様に表-1 および表-2 の関係から感度変数として $I^{-1/4}$ が最善で、次いで $R_A = 1/A$ とした場合が良い事が分かる。

尚、以上で述べた事は任意の骨組構造物で成立し、任意の固有振動数そして固有ベクトルの成分に対して言えることである。

5. おわりに

本研究では、平面骨組構造物の固有値問題を例にとり、感度解析より得られる固有円振動数および固有ベクトルの感度係数を原系の固有円振動数および、固有ベクトルと感度変数値で無次元化し、骨組全体について総和した値が定数となる特性を導き、この特性から固有値問題の感度解析を行う場合の変数の選択についての情報が得られた。

参考文献 1) Fox, R. L. and M. P. Kapoor: Rates of change of Eigenvalues and Eigenvectors, AIAA Journal, Vol. 6, No. 12, pp. 2426-2429, 1968