Ⅰ-374　固有値問題の感度解析の精度に関する検討

国士舘大学工学部　正会員　菊田征勇
東京電機大学理工学部　正会員　松井邦人
東洋大学工学部　正会員　新延泰生

１．はじめに

動的外力を受ける構造物を設計する場合、動的解析による照査が要求されることが多い。系の固有振動数やモード形などのモーダルパラメーターを解析的に把握して、共振の可能性や安定性の検討を行なう必要がある。設計変更の場合の動特性予測には、感度解析手法が有効である。減衰の無い場合の固有値や固有ベクトルの１階の感度解析には Fox等[1] の研究がある。また、減衰振動系における１階および２階の感度解析については井上等[2] の研究がある。ところで、静的荷重を受ける構造物の感度解析では、設計変数の逆数を新たな設計変数とするような設計変数の変換が行なわれてきた。この新たな設計変数を感度変数と呼ぶことにする。本研究の目的は、断面積Ａ、断面２次モーメントＩおよびそれらの逆変数をそれぞれ感度変数として選択し、固有値問題の感度解析の精度について検討するものである。

２．固有値問題の感度解析

固有円振動数の１階の感度係数は式（１）で、固有ベクトルの１階の感度係数は式（２）で与えられる。

$$\frac{\partial \omega_r}{\partial x_i}=\mathbf{Y}_r^T\left(\frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x_i}-\lambda_r\frac{\partial \mathbf{M}(x)}{\partial x_i}\right)\mathbf{Y}_r/(2\omega_r) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{Y}_r}{\partial x_i}=-\frac{1}{2}\mathbf{Y}_r^T\frac{\partial \mathbf{M}(x)}{\partial x_i}\mathbf{Y}_r\mathbf{Y}_r-\sum_{\substack{s=1\\ s\neq r}}^{n}\frac{1}{\lambda_s-\lambda_r}\mathbf{Y}_s^T\left(\frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x_i}-\lambda_r\frac{\partial \mathbf{M}(x)}{\partial x_i}\right)\mathbf{Y}_r\mathbf{Y}_r \quad (2)$$

$\mathbf{K}$ および $\mathbf{M}$ は、それぞれ$n\times n$の剛性マトリックスおよび質量マトリックスであり、正値対称マトリックスである。$\mathbf{Y}_r$ は $n\times 1$のベクトルでr番目の固有ベクトルを表し、λ_r および ω_r はr番目の固有値および固有円振動数を表す。また、$\mathbf{x}$ は$m\times 1$の設計変数ベクトル、x_iはそのi番目の要素で、構造物の断面形状等のパラメーターである。また、$\mathbf{Y}_r^T\mathbf{M}\mathbf{Y}_r=1$ である。

３．感度解析の精度の評価

固有値・固有ベクトルの感度解析の精度の評価は、次式に基づいて判断した。

固有円振動数の感度解析の精度：$(\omega_{re}-\omega_{rc})/\omega_{rc}$ （３）

固有ベクトルの感度解析の精度：$\sqrt{(\mathbf{Y}_{re}-\mathbf{Y}_{rc})^T(\mathbf{Y}_{re}-\mathbf{Y}_{rc})}/\sqrt{2}$ （４）

なお、ω_{re} および$\mathbf{Y}_{re}$ は次式で与えられる。

$$\omega_{re}=\omega_{r0}+\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial \omega_r}{\partial x_i}\right]_0\delta x_i \quad (5)、\qquad \mathbf{Y}_{re}=\mathbf{Y}_{r0}+\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{\partial \mathbf{Y}_r}{\partial x_i}\right]_0\delta x_i \quad (6)$$

ここに、 ω_{r0} 、$\mathbf{Y}_{r0}$ ：それぞれ基準断面積を有する系（基準系）でのr次の固有円振動数および 固有ベクトル、ω_{re} 、ω_{rc} 、$\mathbf{Y}_{re}$ 、$\mathbf{Y}_{rc}$ ：それぞれ断面積を変更した系（摂動系）でのr次の固有円振動数の推定値と計算値、および固有ベクトルの推定値と計算値である。ただし、$\mathbf{Y}_{re}^T\mathbf{Y}_{re}=1$ 、$\mathbf{Y}_{rc}^T\mathbf{Y}_{rc}=1$ である。また$[\ ]_0$ は、x_iで偏微分後 x_iの基準系の値を代入することを示す。ところで固有円振動数の感度解析は式（３）の値が０に近い程、また固有ベクトルの感度解析は式（４）の値が０に近い程（最大値１）、精度が良いことを示すことになる。式（４）において$\sqrt{2}$ は誤差の最大値である。

４．計算例

計算例に用いた門形ラーメンを図１に示す。スパン、高さとも 4.0 m で、７節点６要素の各部材の基準断面の断面積はいづれも 50.00 cm²であり、密度は ρ =7.85 t/m³ である。また、I = α A² （α = 1.0）である。要素①の断面積を -50% から +50% まで摂動させた場合の固有円振動数および固有ベクトルの推定値の精度を、１次～３次の低次の場合について、図２～図７に示す。またこれらの図には、感度変数Ａ、１／Ａ、Ｉ、１／Ｉの場合とともに、感度解析をしなかった場合の結果も図示している。

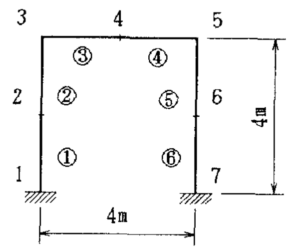

図１　門形ラーメン

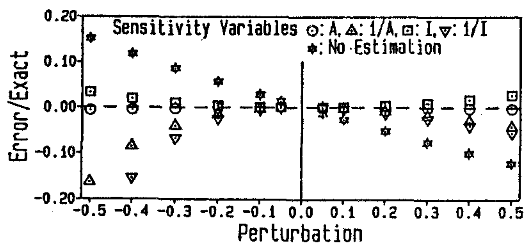

図２　１次の固有円振動数の推定値の精度

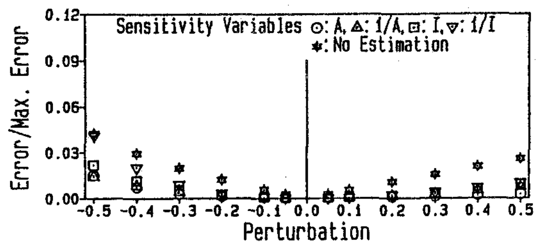

図３　１次の固有ベクトルの推定値の精度

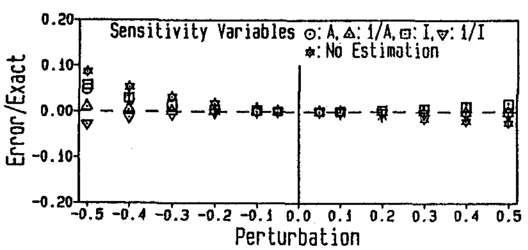

図４　２次の固有円振動数の推定値の精度

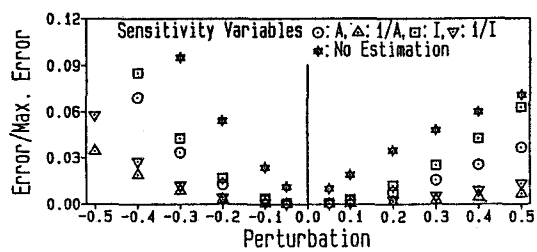

図５　２次の固有ベクトルの推定値の精度

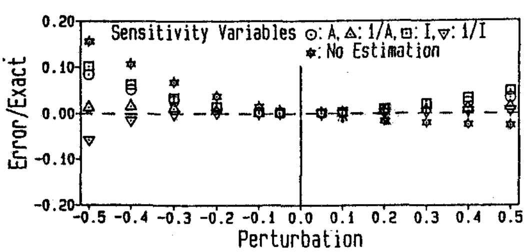

図６　３次の固有円振動数の推定値の精度

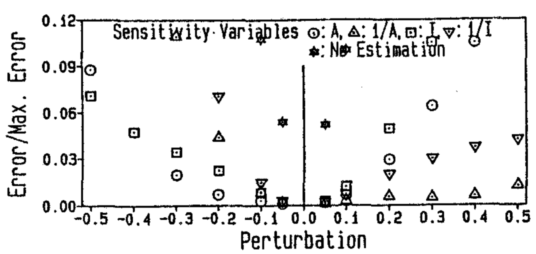

図７　３次の固有ベクトルの推定値の精度

５．おわりに

この例では、門形ラーメンの場合を示したが、他に１０部材平面トラス、片持ばりおよび２層２スパンラーメンの場合についても解析を行っている。

参考文献

1)Fox, R. L. and Kapoor, M. P.: Rates of Change of Eigenvalues and Eigenvectors, AIAA Journal, Vol. 6, No. 12, pp. 2426-2429, Dec. 1968.

2)井上喜雄、藤川猛、今西悦二郎、阿部享： 減衰振動系における感度解析と設計変更後の動特性予測、日本機械学会論文集（Ｃ編）、50巻452号（昭59-4）、pp. 597-606