

I-198 流れの有限要素解析における要素寸法以下の渦表現の試み

東京大学工学部 正員 野村卓史

1. はじめに

乱流の数値解析は、ある見方をすれば現在の計算機能力で制限される差分格子の寸法あるいは有限要素の寸法以下の変動(Subgrid scale eddies)をどう処理するか、という問題といえる。代表的なアプローチは、ナビエ・ストークス方程式を時間平均ないし空間平均して変動成分に関するモデル化を行い、離散モデルの分解能で表現可能な滑らかな解に関する方程式を解く、というものであり、 $k-\epsilon$ モデルやガウス・フィルターに基づくLESなどがよく用いられている。一方スペクトル法のように、変動場を基底関数上(通常は直交関数列)に投影し、高波数成分と低波数成分を分離するアプローチもあり、これに基づくLESもよく行なわれている。近年後者の方法を拡張して基底関数を有限要素法の形状関数に求める研究がなされ始めており¹⁾、ナビエ・ストークス方程式の解析法、ひいては乱流の解析法につながる新しいアプローチとして注目される。本研究ではこの方向で独自の要素の開発を試みたので報告する。

2. 弱形式上での流速場の分離

有限要素解析の基本となる、ナビエ・ストークス方程式と連続条件式の弱形式は次のように表わすことができる。

$$(\dot{u}, \bar{u}) + \nu((u, \bar{u})) + b(\hat{u}, u, \bar{u}) + (p, \text{div } \bar{u}) = (f, \bar{u}) \quad (1a)$$

$$(\text{div } u, \bar{p}) = 0 \quad (1b)$$

ここで、 u, p, f は流速、圧力および物体力、 ν は動粘性係数、上付きの記号 $\bar{\cdot}$ は試行関数を意味し、 $\hat{u}$ は移流速度である。また $(\cdot, \cdot)$ 等は解析対象領域に関して積分を行うことを意味している。

流速 u と、対応する試行関数 $\bar{u}$ を、通常の有限要素で表せる成分 y とそれ以外の成分 z とに分離する。

$$u = y + z, \quad \bar{u} = \bar{y} + \bar{z} \quad (2a, b)$$

この分離にともなって、弱形式(1)を形式的に次のように分離することができる。

$$(\dot{u}, \bar{y}) + \nu((u, \bar{y})) + b(\hat{u}, u, \bar{y}) + (p, \text{div } \bar{y}) = (f, \bar{y}) \quad (3a)$$

$$(\text{div } y, \bar{p}) = 0 \quad (3b)$$

$$(\dot{u}, \bar{z}) + \nu((u, \bar{z})) + b(\hat{u}, u, \bar{z}) + (p, \text{div } \bar{z}) = (f, \bar{z}) \quad (4a)$$

$$(\text{div } z, \bar{p}) = 0 \quad (4b)$$

3. 有限要素

本研究では、分離した流速成分 y およびこれに対応する圧力 p に、通常の2次元の Q_1-P_0 要素を採用し、成分 z については節点まわりの循環 ϕ を節点変数とする次のような形状関数を採用する(図1)。

$$z = \sum_{n=1}^N z^n(\phi^n), \quad z^n = \sum_{i=1}^4 \Phi^n_i \phi^n_i \quad (5a, b)$$

$$\Phi^n_i = \frac{(2m-1)\pi}{2(-1)^{m-1}} \left[\left(\frac{N^n_{i+}}{L_{i+}} \left\{ \frac{n^x_{i+}}{n^y_{i+}} \right\} - \frac{N^n_{i-}}{L_{i-}} \left\{ \frac{n^x_{i-}}{n^y_{i-}} \right\} \right) \right] \quad (6)$$

$$N^n_{i-} = \cos[(2m-1)\pi \xi/2](1-\xi)(1-\eta)/4, \text{ etc.} \quad (7)$$

ここで $i+$ 、 $i-$ はそれぞれ節点 i から反時計まわりに前方および後方の辺を意味し、 L はその辺長、 $\langle n^x n^y \rangle$ はその辺に直交する単位ベクトルである。また ξ, η は要素の標準四角形の座標、 m は補間関数の波数に関する指標であり、その最大値を M とする。 $m=1$ のときの形状関数を図2に示す。

循環 ϕ を変数とすることにより、流速成分 z は個々の四角形要素ごとに弱い意味で連続条件を満足する。すなわち z に関する弱形式(4a)の左辺第4項および式(4b)の左辺の積分が各要素ごとにゼロとなり、これらの方程式に関しては圧力 p を陽的な変数とする必要がなくなる。

Potinの考察によれば Q_1-P_0 要素によって表現できる最小の渦は図3(a)に示すように、辺長 h の正方形要素では直径 $\sqrt{2} \cdot h$ の大きさである²⁾。これに対して $m=1$ の形状関数による渦的構造は同図(b)のように直径 h 程度となる。より大きい m に対してはさらに小さな寸法の渦的構造が要素内に形成される。

4. 有限要素方程式とその解法

式(3)(4)に(5)~(7)を適用して得られる有限要素方程式は次のようである(簡単のために $M=1$ とする)。

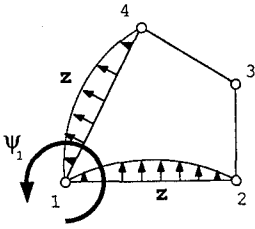


図1 節点まわりの循環φ

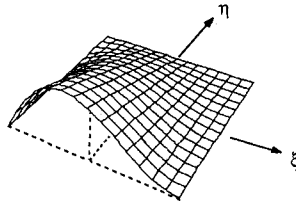


図2 形状関数 N^{11}

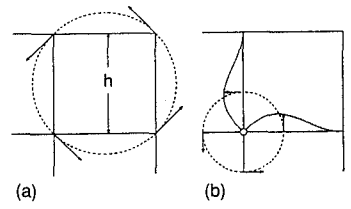


図3 (a) Q_1-P_0 要素で表現される最小規模の渦
(b) $m=1$ の形状関数で表現される渦

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{00} & \mathbf{M}_{01} \\ \mathbf{M}_{10} & \mathbf{M}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{01} \\ \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y} \\ \phi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \mathbf{p} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \end{Bmatrix} \quad (8a)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (8b)$$

ここで $\mathbf{M}$ は質量マトリックス、 $\mathbf{K}$ は粘性項および対流項に関するマトリックス、 $\mathbf{G}$ は grad に対応するマトリックスである。

運動方程式(8a)の第1行と連続条件式(8b)から流速 $\mathbf{y}$ と圧力 $\mathbf{p}$ とを求める過程には標準的なナビエ・ストークス有限要素方程式の解法が適用できる。本研究では Predictor-Corrector法に基づいたBrooksらのアルゴリズム³⁾を採用した。また式(8a)の第2行は ϕ に関する発展方程式であるから、独立に時間積分することができる。ただし対象領域全体に関して変数 ϕ が連続条件を満足する必要があるため隠式を適用しなければならない。ここではCrank-Nicolson公式を前述の Predictor-Corrector法のアルゴリズムに組み込む形でこの方程式の時間積分を行っている。なお ϕ の境界条件は節点流速 $\mathbf{y}$ を拘束した節点でゼロとする。

5. 数値解析例

レイノルズ数 400の正方形キャビティの問題を 16×16 の等間隔メッシュで解析した。図4に示すように低いレイノルズ数の層流の問題であるにもかかわらず、境界層の要素分割が不十分なため通常の Q_1-P_0 要素による解析では上辺とその両隅角部の流速ベクトル $\mathbf{u}$ に非現実的な振動が生じている。これに対して同じ有限要素メッシュに本研究の要素($M=1$)を用いた場合、 $\mathbf{y}$ の分布にそのような振動は認められない(図5)。このときの ϕ の分布を図6に示すが、上辺の二つの隅角部で高い値となっている。また小さい値とはいえ領域内を循環する流れに沿って ϕ が移流している様子も見られ、要素寸法以下の変動成分の挙動が妥当に表現されているものと考えられる。

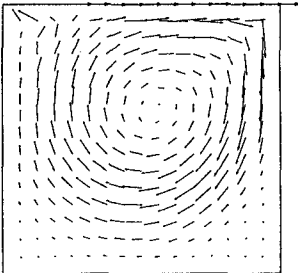


図4 Q_1-P_0 要素による流速ベクトル $\mathbf{u}$ の分布

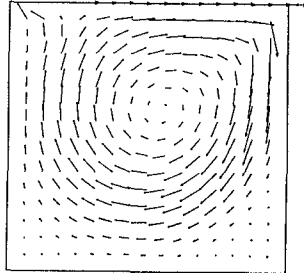


図5 本研究の要素による流速ベクトル $\mathbf{y}$ の分布

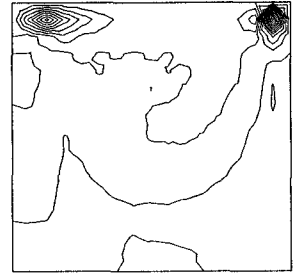


図6 節点まわりの循環φの分布(間隔 0.25)

- 参考文献 1)M. Marion & R. Temam: Nonlinear Galerkin methods, Numer. Math. 57, p.205, 1990.
2)M. Fotin: Old and new finite elements for incompressible flows, IJNMF 1, p.347, 1981.
3)A.N. Brooks & T.J.R. Hughes: Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 32, p.199, 1982.