

I-136

回転自由度を含む面内平面要素

法政大学工学部土木工学科 正 会 員 前田重行
 法政大学大学院工学研究科 学生会員 渡部正則
 法政大学計算センター 正 会 員 武田 洋

1. まえがき

回転自由度を持つ板殻要素の必要性は、多くの実際の工学的問題において生じている。また、曲げ要素と組合せた場合この種類の板殻要素はシェル解析の有効な手段となる。近年、回転自由度を含む四角形要素は、独立な回転場を用いる変分原理から導く手法が提案されているが、本研究は面内回転自由度を含む平面要素の統一的扱いが出来る手法を提案することである。従来の2次元変位場における平面要素の自由度を、縮合的アプローチで角節点に回転自由度を含め3自由度を持つ平面要素に展開するためのアルゴリズムの提案と数値解法解析例を示すことが目的である。

2. 縮合的アプローチによる統一的手法

はり曲げ要素のたわみを表すのによく用いられるHERMITEの補間関数は、式(1)に示すとおりであり、 ω, θ は、それぞれたわみと回転角を表す。

$$\omega(X) = \phi_1^0 \omega_1 + \phi_1^1 \theta_1 + \phi_2^0 \omega_2 + \phi_2^1 \theta_2 \quad (1)$$

ここで、 $\phi_1^0 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$
 $\phi_1^1 = 1(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$
 $\phi_2^0 = 3\xi^2 - 2\xi^3$
 $\phi_2^1 = -1(\xi^2 - \xi^3)$
 ただし、 $\xi = (X - X_1)/l$

また、本研究ではHERMITE補間関数の特別な場合として、 $\omega_1 = \omega_2 = 0$; $\xi = 0.5$ を考えると式(2)を導くことが出来る。

$$\omega_n = l(\theta_2 - \theta_1) / 8 \quad (2)$$

次に従来の2次元変位場における平面要素の角節点*i, j*によって構成される辺の中間点の2方向変位は上記の式(2)を使って一般的に表すと、式(3)になる。

$$W_n = l_{ij}(\theta_j - \theta_i) n_{ij} / 8 \quad (3)$$

ここで、 l_{ij} と n_{ij} は、それぞれその辺の長さとし角節点*i, j*によって構成される辺における外向き単位法線ベクトルを表す。

$$n_{ij} = \frac{\sin \alpha_{ij}}{\cos \alpha_{ij}}, \quad l_{ij} = ((X_{j1} - X_{i1})^2 + (X_{j2} - X_{i2})^2)^{1/2} \quad (4)$$

ただし、角節点が*m*個の場合 $\{i=1 \dots m; k=\text{mod}(i, m)+1\}$ となる。

結果として2次元変位場における平面要素のある辺の中間点の2方向変位を角節点の回転角で表したことになる、中間点の2方向変位を消去したことになる。次に、ここで導入した角節点の回転角と中間点の2次元変位場の関係は次式(5)のようなマトリックスで表すことが出来る。

$$\{U_m\} = \{T'\} \{ \Phi' \} \quad (5)$$

ここで、 $\{U_m\}$ 、 $\{T'\}$ 及び $\{ \Phi' \}$ はそれぞれ平面要素の辺の中間点の2次元変位ベクトル、平面要素の辺の中間点における2次元変位と角節点の回転角との変換マトリックス、及び角節点の回転角ベクトルを表す。更に式(5)を考慮して、2次元変位場における平面要素の節点変位とこの要素の中間点の変位を消去し角節点に導入した回転角及び角節点の変位との関係は以下に示す式(6)で表せられる。

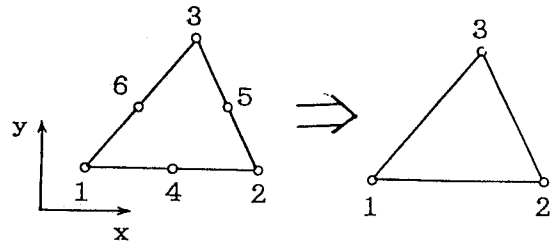


図-1 三角形要素における節点の縮合

$$\{U_e\} = \{T_e\} \{ \Phi_e \} \quad (6)$$

ここで、 $\{U_e\}$ 、 $\{T_e\}$ 及び $\{ \Phi_e \}$ はそれぞれ2次元変位場における平面要素の節点変位ベクトル、2次元変位場における平面要素の節点変位とこの要素の中間点の変位を消去し角節点に導入した回転角及び角節点の変位との変換マトリックス、および角節点の2方向変位と導入した回転角の変位ベクトルを表す。

本研究の面内回転自由度を含む平面要素の剛性行列は 次に示すような縮合的アプローチで求めている。まず従来の2次元変位場の剛性方程式は式(7)のように与えられる。

$$\{K_e\} \{U_e\} = \{P_e\} \quad (7)$$

ここで、 $\{K_e\}$ と $\{P_e\}$ はそれぞれ剛性行列及び荷重ベクトルである。従って、本研究で求めようとする面内回転自由度を含む平面要素の剛性行列は、式(6)を式(7)に代入し両辺に左から $\{T_e\}^t$ をかけて得られる式(8)の $\{K\}$ である。

$$\{K^*\} \{U^*\} = \{P^*\} \quad (8)$$

ここで、 $\{K^*\} = \{T_e\}^t \{K_e\} \{T_e\}$ 、 $\{P^*\} = \{T_e\}^t \{P_e\}$ である。

3. 解析例題及び結果

解析例題は、図-2、図-3 に示す単純梁(CASE-1)と片持梁(CASE-2)とし、諸元は図中に記す。解析モデル(CASE-2)は要素数 4 (1x4), 16 (2x8), 64 (4x16) の3ケースとする。本研究では、縮合的アプローチで面内回転自由度を含む平面要素の統一的な定式化についてまとめた。

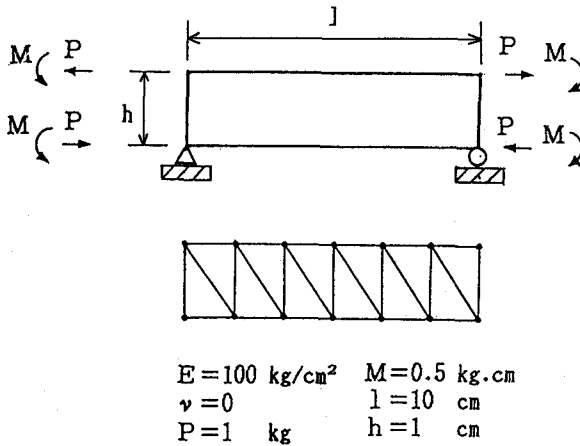


図-2 単純梁(case-1)

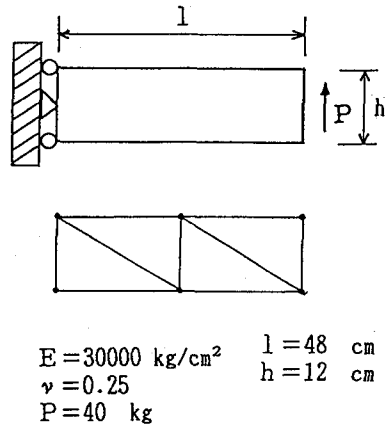


図-3 片持梁(case-2)

- [参考文献] 1) A. Ibrahimbegovic, R.L. Taylor and E. Wilson, A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom. Int. J. numer. methods eng., Vol. 30, 445-457 (1990)
- 2) T. J. R. Hughes and F. Brezzi, On drilling degrees of freedom. Comp. methods appl. mech. eng., 72, 105-121 (1989)
- 3) D. J. Allman, A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis. Int. j. number. methods eng., Vol. 26, 717-730 (1988)