

大同工業大学 正会員 ○水澤 富作
J R 東海 正会員 高見 幸司

1 はじめに 扇形板は、曲線スラブ、曲線フランジやタンクの底板に用いられ、その振動問題についても、解析的手法や Rayleigh-Ritz法、Galerkin法、境界積分方程式法、有限要素法、有限帯板法などの数値解法を用いて解析されている[1]。最近、Spline関数を用いた種々の離散化手法が提案され、板やシェルの解析に適用されている[2]。これらの研究では、3次のSpline関数が主に用いられており、Spline関数の高次の補間特性が有効に用いられていないように思われる。また、扇形板の振動解析に適用した研究が報告されていないようである。

本文では、Kantorovich法とB-spline関数を用いたSpline帯板法を提案し、任意の境界条件をもつ扇形板の自由振動解析を行い、解の収束性や精度などの数値安定性に与えるSpline次数や帯板分割数の影響について検討を行っている。

2 式の定式化 Fig. 1に示すような扇形帯板モデルを導くために、薄板理論と極座標系を用いて式の定式化を行う。この帯板モデルでは、帯板要素の円周方向に固有関数を仮定し、半径方向にSpline関数を用いている。このSpline次数を増大させることにより、任意の高次の帯板モデルが導ける。

変位関数、 $W(\xi, \eta)$ は、無次元化座標 (ξ, η) を用いて、次式で仮定する。

$$W(\xi, \eta) = W_{nm}(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^r \sum_{m=1}^{i_r} C_{nm} N_{n,k}(\eta) \cdot Y_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N] Y_m(\xi) \{C_n\}_m \quad \dots (1)$$

ここで、 $[N] = [N_{1,k}(\eta), N_{2,k}(\eta), \dots, N_{i_r,k}(\eta)]$, $\{C_n\}_m = \{C_{1m}, C_{2m}, \dots, C_{i_r m}\}^T$, また、 $\xi = \theta/\phi$, $\eta = (r - R_i)/B$, $B = R_o - R_i$, $i_r = k - 1 + M_r$ であり、 R_o と R_i はそれぞれ外径と内径である。 $Y_m(\xi)$ は、 θ 方向に仮定した固有関数であり、 $N_{n,k}(\eta)$ は、 $k-1$ 次の正規化されたB-spline関数である。 M_r は帯板要素の分割数、 r は級数の項数、 ϕ は中心角を表す。

等方性扇形板のひずみエネルギー、 U_p と運動エネルギー、 T_p は、次式で与えられる。

$$U_p = (D/2)(\phi/B^2) \int_0^1 \int_0^1 \left[\left\{ \partial^2 W / \partial \eta^2 + (1/A) \partial W / \partial \eta + (1/\phi^2)(1/A^2) \partial^2 W / \partial \xi^2 \right\}^2 \right. \\ \left. - 2(1-\nu) \partial^2 W / \partial \eta^2 \left\{ (1/A) \partial W / \partial \eta + (1/\phi^2)(1/A^2) \partial^2 W / \partial \xi^2 \right\} \right. \\ \left. + 2(1-\nu)(1/\phi)^2 \left\{ (1/A) \partial^2 W / \partial \eta \partial \xi - (1/A^2) \partial W / \partial \xi \right\}^2 \right] A d\eta d\xi \quad \dots (2)$$

$$T_p = (\rho h/2) \omega^2 \phi B^2 \int_0^1 \int_0^1 W^2 \cdot A d\eta d\xi \quad \dots (3)$$

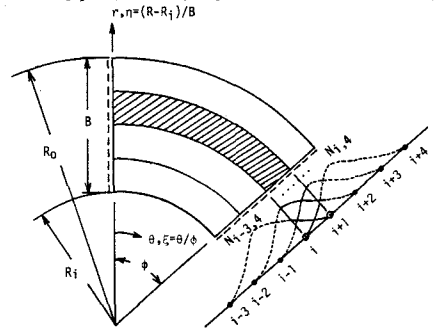
ただし、 $A = (\eta + R_i/B) = \{\eta + 1/(\delta - 1)\}$ and $\delta = R_o/R_i$ である。ここで、 ν はPoisson比、 ρ は密度、 h は板厚、 D は板の曲げ剛性であり、 ω は円振動数(rad/s)である。

したがって、扇形板の汎関数、 Π は、次式で表されるので、

$$\Pi = U_p - T_p \quad \dots (4)$$

エネルギー原理より、 $\{C_n\}_m$ は、次式より求められる。

$$\partial \Pi / \partial \{C_q\}_p = 0; q=1, 2, \dots, i_r, p=1, 2, \dots, r \quad \dots (5)$$



$$\sum_{m=1}^r \sum_{p=1}^r ([K_{nq}]_{mp} \{C_n\}_m - n^2 [M_{nq}]_{mp} \{C_n\}_m) = \{0\}, \quad n, q=1, 2, \dots, i_r \quad \dots (6)$$

ここで、 $n^2 = B^2 \omega \sqrt{\rho h/D}$ 。 $[K_{nq}]_{mp}$ と $[M_{nq}]_{mp}$ は、それぞれ式(2)と(3)より求められる剛性マトリックスと質量マトリックスである。ここで、固有関数に両端単純支持を満たした次式を仮定すると、

$$Y_m(\xi) = \sin(m\pi \xi); (m=1, 2, \dots, r), \quad Y_p(\xi) = \sin(p\pi \xi); (p=1, 2, \dots, r) \quad \dots (7)$$

級数の直交性により、連成項が消えるので、次式のような簡単な式で表される。

$$([K_{nq}]_{mm} \{C_n\}_m - n^2 [M_{nq}]_{mm} \{C_n\}_m) = \{0\} \quad \dots (8)$$

ここで、 $[K_{nq}]$ と $[M_{nq}]$ のマトリックスの大きさは、 $k-1+M_r$ で表される。

3 数値計算例及び考察 Spline帯板法の有用性を示すために、半径方向の支持線で単純支持された扇形板の振動解析を行い、解の収束性や精度に与えるSpline次数、 $k-1$ や帯板要素数の影響について検討を行っている。

TABLE 1. Convergence studies of frequency parameter, n^2 for annular sector plates with radial edges simply supported and both circumferential edges free ($R_o/R_i=2.0$, $\phi=30^\circ$ and $\nu=0.3$)

Table 1には、円弧辺が自由で

ある扇形板($R_o/R_i=2.0$, $\phi=30^\circ$, $\nu=0.3$)の振動数パラメータの収束性に与える高次帯板モデルと帯板分割数の影響が示されている。ここで、Spline次数、 $k-1$ を2次から5次まで変化させ、また帯板分割数、 M_r を4から12にとって

いる。これより、分割数を高めると一様に高次モードの解まで一定値に収束している。また、高次の帯板モデルを用いれば、少ない分割数で、安定した収束状態が得られ、その収束値も解析解[3]と良く一致した結果が示されている。種々の境界条件、中心角などを変化させて解析した

Degree of Spline $k-1$	Numbers of strips M_r	Modes							
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
2	4	11.7735	29.0579	44.1337	51.6804	82.4794	95.3191		
	6	11.7698	28.9573	44.0947	51.1011	82.3159	91.5018	95.4587	118.657
	8	11.7682	28.9199	44.0709	50.8601	82.2494	90.2329	95.4399	118.176
	10	11.7673	28.9019	44.0575	50.7405	82.2117	89.8236	95.3876	117.956
	12	11.7668	28.8920	44.0495	50.6732	82.1887	89.2843	95.3541	117.835
3	4	11.7665	28.8370	44.0586	50.7449	82.3155	90.5307	95.4381	
	6	11.7659	28.8718	44.0359	50.5556	82.1676	88.8328	95.3129	117.684
	8	11.7658	28.8698	44.0315	50.5264	82.1409	88.5837	95.2797	117.589
	10	11.7657	28.8693	44.0302	50.5188	82.1337	88.5243	95.2694	117.564
	12	11.7657	28.8691	44.0298	50.5161	82.1312	88.5045	95.2655	117.556
4	4	11.7657	28.8696	44.0318	50.5254	82.1520	88.7898	95.2959	117.737
	6	11.7657	28.8690	44.0296	50.5148	82.1307	88.5079	95.2654	117.559
	8	11.7657	28.8689	44.0294	50.5138	82.1293	88.4906	95.2625	117.550
	10	11.7657	28.8689	44.0294	50.5137	82.1291	88.4882	95.2621	117.549
	12	11.7657	28.8689	44.0294	50.5136	82.1290	88.4877	95.2619	117.549
5	4	11.7657	28.8690	44.0295	50.5150	82.1306	88.5524	95.2643	117.569
	6	11.7657	28.8689	44.0294	50.5137	82.1290	88.4886	95.2620	117.549
	8	11.7657	28.8689	44.0294	50.5136	82.1290	88.4875	95.2619	117.549
	10	11.7657	28.8689	44.0294	50.5136	82.1290	88.4874	95.2619	117.549
	12	11.7657	28.8689	44.0294	50.5136	82.1290	88.4874	95.2619	117.549

Ramakrishnan et al.³ 11.7657 28.8690 44.0295 50.5137 82.1291

が、精度の高い結果を得ている。

2 あとがき 扇形板の振動解析における、Spline帯板法の有用性について検討を行った。ここで得られた主な結果を示すと次のようになる。

- (1) 帯板の分割数を増大とともに、高次モードの振動数まで一様な収束性が得られ、また解析解や他の数値解などと比較しても、非常に良く一致した結果が示された。
- (2) Spline次数を高めることにより、高次の帯板モデルが導け、また、高い解析精度が得られている。
- (3) Spline帯板法では、従来の有限帯板法と比較しても、未知数をかなり減少させることができる。

参考文献 [1] Mizusawa, T.: Application of the spline element method to analyze vibration of annular sector plates. J. Sound Vib., vol. 149, 1991(to appear). [2] 水澤: スプライン関数を用いた構造解析に関する考察. 大同工業大学紀要, vol. 25(1989). [3] Ramakrishnan, R. et al.: Free vibration of stiffened circular bridge decks. J. Sound Vib., vol. 44, 209-221(1976).